経済と経営　*53-1*（2023.3）

〈研究ノート〉

常微分方程式の解の構成と汎弱位相について

山内　和幸

線形位相空間 $\mathfrak{V}$ の連続線形汎関数全体を $\mathfrak{V}^*$ によって表し，$\mathfrak{V}$ と $\mathfrak{V}^*$ の自然な双線形の対を ${}_{\mathfrak{V}}\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle_{\mathfrak{V}^*}$ によって表わすものとする．つまり，$\varphi\in\mathfrak{V}$ と $u\in\mathfrak{V}^*$ に対して ${}_{\mathfrak{V}}\langle\,\varphi,u\,\rangle_{\mathfrak{V}^*}=u(\varphi)$ とおく．各 $u\in\mathfrak{V}^*$ に対して ${}_{\mathfrak{V}}\langle\,\cdot,u\,\rangle_{\mathfrak{V}^*}$ が連続となる最も弱い $\mathfrak{V}$ の位相を ($\mathfrak{V}$ の) 弱位相といい，同様に各 $\varphi\in\mathfrak{V}$ に対して ${}_{\mathfrak{V}}\langle\,\varphi,\cdot\,\rangle_{\mathfrak{V}^*}$ が連続となる最も弱い $\mathfrak{V}^*$ の位相を ($\mathfrak{V}^*$ の) 汎弱位相という．関数空間の位相構造を用いて常微分方程式の解を構成することは初学者に与える学習課題として広く認識されているが，本稿では同様な作業を行うことにより汎弱位相下で解が構成できる環境についての考察材料を作りたい．

1　汎弱位相におけるコンパクト性

本稿において，ベクトル空間は全て $\mathbb{C}$ 上のものとする．また，線形位相空間としては局所凸のみを考えるが，定理等の慎重にすべき箇所については誤解がないように条件の明記を心掛ける．

まず，汎弱位相を取り扱う上で基本的な性質である，有界集合のコンパクト性を挙げる．書籍等取り上げられる場合はその論旨等によって条件や形式に違いがあるものの，関数空間あるいは線形位相空間を扱うほとんどのものでこの性質は触れられている．粗雑さを承知の上で，名称のみを列挙してみると，「Alaoglu」の定理（[9],[17],[26],[27] 等）や「Banach-Alaoglu」の定理（[15] 等），「Alaoglu-Bourbaki」の定理（[7] 等）とするものがある．その他，特に名をつけていない場合 ([29] や [30] 等) も多い．Hille-Phillips[13] では，ノルム位相についてであるが，定理に対する関与として，L.Alaoglu([1]), N.Bourgaki([6]), S.Kakutani([14]) の仕事を挙げている．ただし，本稿では定理成立の経緯等は論じず，主張を以下の形で述べるに留める．

定理 1 (Alaoglu-Banach-Bourgaki) U を局所凸線形位相空間 $\mathfrak{V}$ における 0 の近傍とし，U^0 を U の極 (polar)，すなわち，

$$U^0=\left\{\,\nu\in\mathfrak{V}^*\,\middle|\,{}_{\mathfrak{V}}\langle\,v,\nu\,\rangle_{\mathfrak{V}^*}\leqq 1,\quad v\in U\,\right\}$$

とする．このとき，U^0 は ($\mathfrak{V}^*$ の) 汎弱位相でコンパクトである．特に $\mathfrak{V}$ がノルム空間ならば $\mathfrak{V}^*$ の中の任意の半径の閉球は $\mathfrak{V}^*$ の汎弱位相でコンパクトである．

なお，岩波数学辞典第4版 [18] における線形位相空間の項目では極を異なる形で定義している．U が円形かつ凸ならば上記のものと同値になるので，局所凸位相の基本近傍の中で扱う限り，特に不便はない．従って，本稿の中では上で挙げた定義の形のみを考えることにする．

ところで，コンパクト性に関連する重要な事柄の中に不動点定理がある．無限次元の線形位相空間については縮小写像によるものの他, Birkhoff-Kellog[4], Rothe[23], および， J.Schauder の仕事 ([24], [25]) 等が知られているが，幅広い位相で扱えるものとしては A.Tychonoff が示した不動点定理 ([28]) がある．この主張について，Dunford-Schwartz[9] が不動点性 (fixed point property) を扱った際の形によって述べる．

定理 2 (Tychonoff) K を局所凸線形位相空間 $\mathfrak{X}$ のコンパクト集合とし，連続写像 $\mathcal{T}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ が

$$\mathcal{T}(K)=\{\,\mathcal{T}(x)\,|\,x\in K\,\}\subsetneqq K$$

をみたすとする．このとき，K には $\mathcal{T}$ の不動点が存在する．すなわち，

$$\mathcal{T}(x_0)=x_0$$

をみたす $x_0\in K$ が存在する．

なお，高橋 [26] は $\mathcal{T}(K)\nsubseteqq K$ の場合にも使える Tychonoff の不動点定理の拡張の例を紹介している．すなわち，局所凸線形位相空間 $\mathfrak{X}$ のコンパクト集合 K と連続写像 $\mathcal{T}:K\to\mathfrak{X}$ について，K の中に $\mathcal{T}$ の不動点が存在しないならば

$$0<p(x_0-\mathcal{T}(x_0))=\min\{\,p(x-\mathcal{T}(x_0))\,|\,x\in K\}$$

をみたすセミノルム p と $x_0\in K$ が存在する，としている．つまり，この状況が "潰れ" てしまえば $\mathcal{T}$ は K に不動点を持つことになる．

2 関数空間上の積分について

関数空間に値を取る関数の原始関数を求める際には積分について合理的な定義とその構造に関する知識が必要となる．積分の合理化については I.M.Graves が [11] の中で Riemann 流の意味付けを行っている．また，[31] によると，同じ時期に T.H.Hildebrandt が Lebesgue の意味で積分を定義している．Banach 空間に値をとる関数に関する Lebesgue 流の積分については 1930 年代から構造等の研究が進み ([3], [5], [8], [10], [19], [21])，その後，局所凸線形位相空間を値を取る関数にも議論の対象に広がった ([20], [22])．1950 年代までには他の解析手法の進展も重なって，解析学の研究を支える基礎的な道具となった ([9], [12], [13], [30])．

Banach 空間に値をとる Lebesgue 流の積分は今日 Bochner 積分と呼ばれている．例えば, Arendt et al[2] の 1 章，Drábek-Milota[7] の 3 章，宮寺 [16] の 6 章, 田辺 [27] の 7 章，Yosida[30] の 5 章等で取り上げている．詳しくはそれらを参考にして欲しい．以下，必要な事柄だけを簡単に述べる．

$(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とし，$u(\cdot)$ を Ω から Banach 空間 $\mathfrak{X}$ へのベクトル値関数とする．Lebesgue の意味による可測関数を次の (a) と (b) の 2 つの意味で考える．

(a) 互いに素な，測度有限の可測集合が可算個あり，それぞれの上で定義された有限値をとるある関数の列が殆どいたるところの $s \in \Omega$ で $u(s)$ に $\mathfrak{X}$ のノルム位相（強位相）で収束する．さらに強収束しないところの s では $u(s)=0$ となる．

(b) 全ての $x^* \in \mathfrak{X}^*$ に対し，${}_{\mathfrak{X}}\langle\, u(\cdot), x^* \,\rangle_{\mathfrak{X}^*}$ が複素値関数として可測である．

(a) をみたすときを「u は**強い $\mathcal{B}$ 可測**」であるといい，(b) をみたすときを「u は**弱い $\mathcal{B}$ 可測**である」という．さらに $\{\, u(s) \,|\, s \in \Omega \,\}$ が可分，すなわち，可算濃度の稠密集合をもつとき，「u は**可分値的である**」と表現する．このとき，次が成り立つことが知られている．

定理 3 (Pettis) $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，u が Ω から Banach 空間 $\mathfrak{X}$ への関数とする．このとき，u が強い $\mathcal{B}$ 可測であることの必要十分条件は u が弱い $\mathcal{B}$ 可測，かつ，u が可分値的となることである．

次に Bochner 積分を定義する．$u=u(\cdot)$ が有限個の定義関数の和で表現できる場合については $\displaystyle\int_\Omega u(s)\mu(\mathrm{d}s)$ を考えることが容易である．このことを踏まえて，一般の u に対する Bochner 積分を以下の形で定義する．以下，$\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ は $\mathfrak{X}$ のノルムを表す．

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|u(s)-u_n(s)\|_{\mathfrak{X}}\, \mu(\mathrm{d}s) = 0$$

となる関数列 $\{u_n\}$ を, 単関数の有限和など，積分値が定義出来る関数列で構成する．この $\{u_n\}$ について，

$$\int_\Omega \chi_B(s) u_n(s) \mu(\mathrm{d}s)$$

がノルム位相で Cauchy 列を作るならばその極限を B 上で定義された x の測度 μ による **Bochner 積分**といい，$\displaystyle\int_\Omega u(s)\mu(\mathrm{d}x)$ で表す．なお，χ_B は B の定義関数を表す．測度 μ による u の Bochner 積分が有限の値を取るとき，（Bochner 積分の意味で）**u は μ 可積分である**という．これについては次が成り立つ．

定理 4 (Bochner) $(\Omega, \mathcal{B}\,\mu)$ を測度空間とし，u が Ω から Banach 空間 $\mathfrak{X}$ への強い $\mathcal{B}$ 可測な関数とする．このとき，u が μ 可積分であることの必要十分条件は $\|u\|_{\mathfrak{X}}$ が μ 可積分であることである．

二つの Banach 空間 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ があり，$\mathfrak{X}$ の部分空間 $\mathfrak{D}$ から $\mathfrak{Y}$ への線形写像 A について，A のグラフ，すなわち，

$$\{\, (x, A(x)) \,|\, x \in \mathfrak{D} \,\}$$

が $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ の中で閉集合となるとき，A を線形閉作用素という．明らかに閉部分空間で定義された連続線形作用素は同じ定義域で線形閉作用素である．線形閉作用素を使った次の定理も有用である．

定理 5 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ をともに Banach 空間とし，$\mathfrak{X}$ の部分空間 $\mathfrak{D}$ 上で定義された線形閉作用素 A について，その値域が $\mathfrak{Y}$ に含まれているものとする．さらに，測度空

間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ に関して，$u : \Omega \to \mathfrak{D}$ が μ 可積分であるものとする．このとき，Au が μ 可積分ならば $\displaystyle\int_\Omega u(s)\mu(\mathrm{d}s) \in \mathfrak{D}$ であり，

$$A(\int_\Omega u(s)\mu(\mathrm{d}s)) = \int_\Omega A(u(s))\mu(\mathrm{d}s)$$

が成り立つ．

ここで，$\mathfrak{X}$ が Banach 空間ならば各 $x^* \in \mathfrak{X}^*$ に対する ${}_{\mathfrak{X}}\langle\, \cdot, x^* \,\rangle_{\mathfrak{X}^*}$ は $\mathfrak{X}$ のノルム位相で連続になるので，それぞれの積分に意味があるとき，

$${}_{\mathfrak{X}}\langle \int_\Omega u(s)\mu(\mathrm{d}s), x^* \,\rangle_{\mathfrak{X}^*} = \int_\Omega {}_{\mathfrak{X}}\langle\, u(s), x^* \,\rangle_{\mathfrak{X}^*}\, \mu(\mathrm{d}s), \qquad (\text{ただし，}x^* \in \mathfrak{X}^*)$$

が成り立つ．また，$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}^*$ となる Banach 空間 $\mathfrak{Y}$ があれば各 $v \in \mathfrak{Y}$ に対して ${}_{\mathfrak{Y}}\langle\, v, \cdot \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}$ は $\mathfrak{Y}^*$ の強位相，すなわち，$\mathfrak{X}$ のノルム位相で連続となる．よって，それぞれの積分に意味があるならば

$${}_{\mathfrak{Y}}\langle\, v, \int_\Omega u(s)\mu(\mathrm{d}s) \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*} = \int_\Omega {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, v, u(s) \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\, \mu(\mathrm{d}s), \qquad (\text{ただし，}v \in \mathfrak{Y})$$

が成り立つ．さらに, 少々拙速になるが，以下の議論では，$\mathfrak{X}$ から $\mathfrak{X}$ の線形閉作用素を考える際，その作用素を A とおくと，$s \in \Omega$ に対する $u(s)$ がすべて A の定義域に入っているならば

$$\begin{aligned}
{}_{\mathfrak{X}}\langle\, A\left(\int_\Omega u(s)\mu(\mathrm{d}s)\right), x^* \,\rangle_{\mathfrak{X}^*} &= {}_{\mathfrak{X}}\langle \int_\Omega Au(s)\mu(\mathrm{d}s), x^* \,\rangle_{\mathfrak{X}^*} \\
&= \int_\Omega {}_{\mathfrak{X}}\langle\, Au(s), x^* \,\rangle_{\mathfrak{X}^*}\, \mu(\mathrm{d}s), \\
{}_{\mathfrak{Y}}\langle\, v, A\left(\int_\Omega u(s)\mu(\mathrm{d}s)\right) \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*} &= {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, v, \int_\Omega A(u(s))\mu(\mathrm{d}s) \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*} \\
&= \int_\Omega {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, v, Au(s) \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\, \mu(\mathrm{d}s)
\end{aligned}$$

をみたすものと基本的には考えることにする．

3　汎弱位相下における Riemann 和の収束について

局所凸位相の下，Riemann 和の極限を考察する．和の対象とする関数は $\mathbb{R}$ の閉区間が定義域である連続関数だけを考える．

$\mathfrak{Y}$ を局所凸線形位相空間とし，$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}^*$ とする．$u : [a, b] \to \mathfrak{X}$ を $\mathfrak{X}$ の汎弱位相において連続とする．$[a, b]$ の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ と 0 を含む凸集合 C に対して $x_1, \cdots, x_m, x \in C$ ならば

$$\frac{1}{b-a}\sum_{j=1}^m (t_j - t_{j-1})\, x_j - x \in C$$

である．従って，

$$u(s) - u(t) \in C, \qquad s,\, t \in [a, b]$$

ならば u の Riemann 和 $S_\Delta(u)$ と任意の $\tau \in [a, b]$ に対して，

$$\pm \left(u(\tau) - \frac{1}{b-a} S_\Delta(u) \right) \in C$$

となる．さらに，各 $1 \leqq j \leqq m$ に対して

$$u(s) - u(t) \in C, \qquad s,\, t \in [t_{j-1}, t_j]$$

をみたすならば上と同様な理由で任意の Δ の細分 Δ' について

$$\pm \frac{1}{b-a} \left(S_\Delta(u) - S_{\Delta'}(u) \right) \in C$$

が成り立つ．

ここで，汎弱位相における 0 の円形凸近傍 V を任意にとる．$[a, b]$ のコンパクト性から u は一様連続となる．適当な $\delta > 0$ を取ることで分割の大きさが δ より小さいならばその同じ小区間に入る s と t に対して

$$u(s) - u(t) \in V$$

が成り立つ．今，分割 Δ_1 と Δ_2 がともに大きさ δ より小さいものとする．$\Delta' = \Delta_1 \cup \Delta_2$ は Δ_1, Δ_2 のどちらにとっても細分になるので，

$$\pm \frac{1}{b-a} \left(S_{\Delta_j}(u) - S_{\Delta'}(u) \right) \in V, \quad (j = 1,\, 2).$$

よって，

$$\frac{1}{2(b-a)} \left(S_{\Delta_1}(u) - S_{\Delta_2}(u) \right) \in V, \quad (j = 1,\, 2).$$

となる．このことから汎弱位相の中では $\{S_\Delta\}$ が一般化列として Cauchy 列を形成していることが分かる．従って，Riemann 和は汎弱収束することになる．

上の構成について，Riemann 和が Cauchy 列を示すことだけならば汎弱位相の具体的な構造は使っていない．道具にするには心許ないので，$\mathfrak{X}$ や $\mathfrak{Y}$ の構造を観察する必要がある．

ちなみに “Banach 空間への関数 u が強連続であるとき，Riemann 積分と Bochner 積分が一致する” ことは事実であり，教科書の演習問題として取り上げられるものである（例えば [16]）．

4　常微分方程式の解の構成について

$\mathfrak{Y}$ を Banach 空間とし，$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}^*$ とおく．線形作用素 $A : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ は有界であり，さらに，$f : [0, L] \to \mathfrak{X}$ は強位相で連続であるものとする．それらを使って，常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au + f, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

の解を考えるが，本稿では次の積分方程式の形に換えて議論することにする．すなわち，$u:[0,L]\to\mathfrak{X}$ に対して

$$\mathcal{I}(u)(t)=u_0+\int_0^t Au(s)\mathrm{d}s+\int_0^t f(s)\mathrm{d}s,$$

と定義し．$u=\mathcal{I}(u)$ となる u を解とする．具体的には，各 $\varphi\in\mathfrak{Y}$ に対して

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u(t)\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}={}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,\mathcal{I}(u)(t)\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\\
&=\ {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,\int_0^t Au(s)\mathrm{d}s\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\\
&=\ {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,A\int_0^t u(s)\mathrm{d}s\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\\
&=\ {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+\int_0^t {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,Au(s)\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\,\mathrm{d}s+\int_0^t {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,f(s)\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

をみたす u を作る．これを本稿の最後の作業とする．

まず，$u_1=\mathcal{I}(u_0)$，$u_{j+1}=\mathcal{I}(u_j)$ とおき, この $\{u_n\}$ の形を求める．u_1 については各 $\varphi\in\mathfrak{Y}^*$ に対して

$$\begin{aligned}
{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_1\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\ &=\ {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,\int_0^t Au_0\mathrm{d}s\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\\
&=\ {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,Au_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\int_0^t \mathrm{d}s+\int_0^t {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,f(s)\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\,\mathrm{d}s\\
&=\ {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+t\,{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,Au_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+\int_0^t {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,f(s)\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\,\mathrm{d}s\\
&=\ {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_0+tAu_0+\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}
\end{aligned}$$

となり，

$$u_1=u_0+tAu_0+\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

を得る．同様に，

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_2\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\\
&=\ {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+\int_0^t {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,Au_0+sA^2u_0+\int_0^s Af(r)\mathrm{d}r\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\,\mathrm{d}s+{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\\
&=\ {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,u_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}+\int_0^t {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,Au_0+sA^2u_0\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\,\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^s {}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,Af(r)\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&\quad+{}_{\mathfrak{Y}}\langle\,\varphi,\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}
\end{aligned}$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, u_2 \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*} &= {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, u_0 + tAu_0 + \frac{t^2}{2}A^2u_0 \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*} \\
&\quad + \int_0^t \int_0^s {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, Af(r) \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\, \mathrm{d}r\mathrm{d}s + {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, \int_0^t f(s)\mathrm{d}s \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}
\end{aligned}
$$

である．ここで，部分積分を用いると，

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^s {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, Af(r) \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\, \mathrm{d}r\mathrm{d}s &= t\int_0^t {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, Af(s) \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\, \mathrm{d}s - \int_0^t s\,{}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, Af(s) \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\, \mathrm{d}s \\
&= {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, \int_0^t (t-s)\, Af(s)\mathrm{d}s \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\, .
\end{aligned}
$$

従って，

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, u_2 \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*} &= {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, u_0 + tAu_0 + \frac{t^2}{2}A^2u_0 \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*} \\
&\quad + {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, \int_0^t (t-s)\, Af(s)\mathrm{d}s \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*} + {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, \int_0^t f(s)\mathrm{d}s \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*} \\
&= {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, u_0 + tAu_0 + \frac{t^2}{2}A^2u_0 \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*} \\
&\quad + {}_{\mathfrak{Y}}\langle\, \varphi, \int_0^t \left(\mathbf{1}_{\mathfrak{X}} + (t-s)\, A\right) f(s)\mathrm{d}s \,\rangle_{\mathfrak{Y}^*}\, ,
\end{aligned}
$$

すなわち，

$$
u_2(t) = u_0 + tAu_0 + \frac{t^2}{2}A^2u_0 + \int_0^t \left(\mathbf{1}_{\mathfrak{X}} + (t-s)\, A\right) f(s)\mathrm{d}s
$$

を得る．ここで，$\mathbf{1}_{\mathfrak{X}}$ は恒等写像を表す．

以下，同様な計算を続けると，

$$
u_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!}A^j u_0 + \int_0^t \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-s)^j}{j!} A^j f(s)\mathrm{d}s
$$

を得る．ここで，$x \in \mathfrak{X}$ に対して

$$
\mathcal{U}_n(t)x = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!}A^j x + \int_0^t \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-s)^j}{j!} A^j f(s)\mathrm{d}s
$$

とおく．今は A を有界としているので各 t に対して $\{\mathcal{U}_n(t)u_0\}$ は強位相で一様収束列である．この極限を $u_\infty(t)$ とおくと $\mathcal{I}(\mathcal{U}_n(\cdot)u_0)(t)$ は $\mathcal{I}(u_\infty)(t)$ に強位相で一様収束する．$\mathcal{U}_{n+1}(t)u_0 = \mathcal{I}(\mathcal{U}_n(\cdot)u_0)(t)$ となることを用いると，$u_\infty = \mathcal{I}(u_\infty)$，すなわち，$u_\infty$ が求める解となる．

5 終わりに

弱い位相においてはコンパクト性という性質は得やすいが，一方，それが定義域側の位相であれば連続性が当然の難所となる．本稿の常微分方程式の解の構成は結局のところ Banach 空間上の強位相の中で議論しているが，A を $\mathfrak{V}$ の閉作用素で表現出来れば少しだけ動きが良い．いずれにしても，広い一般論を目指している訳ではなく，1，2 の心当たりに使えないかと考えているだけであるが，状況に甘んじる感傷は一切ない．周辺の仕事を確認しながらあるべき形を明示したい．

References

[1] Alaoglu, L.,*Weak topologies of normed linear spaces*, Ann. of Math.,**41** (1940), pp.252-267.

[2] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M., and Neubrander, F., "Vector-valued Laplace transfroms and Cauchy problems“, second edition, Birkhäuser, Basel, 2011.

[3] Birkhoff, G., *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., **38**(1935), pp.357-378.

[4] Birkhoff, G. D. and Kellog, O. D. *Invariant points in function space*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), pp.96-115.

[5] Bochner, S., *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind*, Fund. Math., **20** (1938), pp.262-276.

[6] Bourbaki, N.,*Sur les espaces de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris, **206** (1938), pp.1701-1704.

[7] Drábek, P. and Milota, J.,"Methods of nonlinear analysis applications to differential equations", Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2007.

[8] Dunford, N., *Integration in general analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **37** (1935), pp.441-453.

[9] Dunford, N. and Schwartz, J. T.,"Linear operators part I, general theory", Wiley Classic Library edition, Wiley-Interscience, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1988.

[10] Gel'fand, I. M., *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Mat. Sbornik N. S., **4(46)** (1938), pp.235-286.

[11] Graves, I. M., *Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927), pp.163-177.

[12] Hildebrandt, T. H.,*Integration in abstract spaces*, Bull. Amer. Soc., **59** (1953), pp.111-139.

[13] Hille, E. and Phillips, R. S.,“Functional analysis and semi-groups”, American Mathematical Society colloquium publications **31**, AMS, Providence, 1957.

[14] Kakutani, S.,*Weak topology, bicompact sets, and the principle of duality*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **16** (1940), pp.63-67.

[15] Kelley, J. L. and Namioka, I. *et al.* “Linear topological spaces”, Springer varlag, New York-Hidelberg-Berlin, 1963.

[16] 宮寺功,「関数解析」, 第 2 版, 理工社, 1996.

[17] Narici, L. and Beckenstein, E. “Topological vector spaces”, second edition, CRC press, Boca Raton, 2011.

[18] 日本数学会編,「岩波 数学辞典」, 第 4 版, 岩波書店, 2007.

[19] Pettis, B. J., *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), pp.277-304.

[20] Phillips, R. S., *Integration in a convex linear topological space*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), pp.114-145.

[21] Price, G. B., *The theory of integration*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), pp.1-50.

[22] Rickart, C. E., *Integration in a convex linear topological space*, Trans. Amer. Math. Soc. **52** (1942), pp.498-521.

[23] Rothe,E., *Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen*, Compositio Math., **5**(1938), pp.177-197.

[24] Schauder, J., *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Z., **26**(1927), pp.47?65.

[25] Schauder, J., *Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math., **2** (1930), pp.1-6.

[26] 高橋渉, 「非線形関数解析学　不動点定理とその周辺」, 近代科学社, 1988.

[27] 田辺広城, 「関数解析 上」, 実教出版, 1978.

[28] Tychonoff, A.,*Ein Fixpunktsatz*, Math, Ann., **111**(1935) , pp.767-776.

[29] 山中健, 「線形位相空間と一般関数」, 共立出版, 1966.

[30] Yosida, K.,“Functional Analysis”, second edition, Springer, Berlin, Heidelberg-New York, 1968.

[31] Richardson, R. G. D.,“The thirty-third summer meeting of the American Mathematical Society,” Bull. Amer. Math. Soc., **33**(1927), pp.641-662.