札幌大学総合論叢　第13号（2002年3月）

〈**論文**〉

4次元時空のRiemann幾何学表現について

村　田　茂　昭

1. はじめに

われわれの時空（空間座標に時間座標を加え4次元空間化したもの）は，Riemann幾何学的には，異常Riemann空間である。すなわち，Riemann空間のノルム（座標が微小に異なる2点間の距離の2乗）が，正にも負にもゼロにもなり得る。このことは，Riemann幾何学の創設の趣旨（ノルムを，正定値･･･常に正のゼロではない値･･･とする）には反するが，Einsteinが意図したかどうかにかかわらず，これは彼の相対性原理の数学的根本原理といってもいい重要な仮定である。また，「光路（光の進む路）上において，4次元空間の距離がゼロになる」というように，Einsteinはこの異常Riemann空間の性質を上手に利用して理論を組み立てている。

物理学史を紐解けば，Einsteinは，「時間も座標の一種である」ことを指摘したが，実際に時空の4次元化を試みたのは，Minkowskiである。Minkowskiは，時間軸または，空間軸に純虚数を導入して，Einsteinの理論を説明することに成功した。Minkowskiが当初からRiemann幾何学を意識していたかどうか不明であるが，彼の理論を検討すれば，この段階で，我々の時空は異常Riemann空間になったのである。現在では，この虚数を導入する表現法は敬遠されて，正統的な一般相対性理論の説明から姿を消した。しかし，現在でも，平坦な時空で空間部分がデカルト座標である時空は，（虚数を使用しなくとも）Minkowski座標系と呼ばれている。

「4次元Riemann空間」であるから，時間座標も空間軸の一種であるが，従来の慣習に従って，相対性理論以前の3次元空間軸を空間軸と呼び，新たに付け加わった時間座標軸を時間軸と呼ぶ。実際のところ，Einsteinの相対性理論は，「4次元空間の理論」という

よりは，3＋1次元空間の理論なのである。

本論文では，まず，Minkowski が提案した虚数を使用するタイプの Minkowski 時空について考察し，Riemann 幾何学的見地から，これが現在の虚数を使用しない表現と等価であることを確認する。次に，もしもノルムを正にするとしたらどういう案が考えられるかを検討する。その結果，「ノルムを正定値に変更するとすれば，ノルムとして単なる2乗和ではなく複素数の絶対値の2乗の和に相当するものを採用すべきである」という結論に達した。この場合，affinne 接続係数と基本テンソルとの間の関係式には変更はないが，測地線の方程式が変更になる。

もちろん，我々の時空が異常 Riemann 空間であることは，Einstein の相対性理論の根幹部分に関係し，これを単なる思い付きで捨て去ることはできない。すなわち，物理学としては上記のごとき簡単なノルムの変更だけですむ問題ではないのであるが，数学としては興味ある問題であると考える。

2. Minkowski 座標系

Einstein の特殊相対論を表現するにあたり，Minkowski は3次元のデカルト座標に時間座標を付け加え，我々の時空の4次元座標化を試行した[1)]。このとき，彼は時間座標を第4番目の座標とし虚数を用いることとした[2)]。3次元の空間座標に時間座標を付け加えるとき，Minkowski のように第4番目の座標とする案と，第0番目の座標とする案とあるが基本的にはどちらでもよい。ここでは，最近の傾向にしたがって第0番目の座標とする方法を採用する。この Minkowski の原案を時間座標の順番のみ変えた方式を本論文では，Minkowski 座標系（時間軸虚数表示）と称する。この場合，空間座標は3次元のデカルト座標である。その後，時間座標に実数を用い空間座標に虚数を用いる方法も採用されることがあった。本論文では，この後者の表現方式を Minkowski 座標系（空間軸虚数表示）と表現する。

後の章の説明との連続性の見地から後者を先に取り上げる。以下の第2章，第3章においては，「特殊相対論」の分野における空間表現を Riemann 幾何学を用いて論ずる。

2.1 Mikowski 座標系（空間軸虚数表示）

この表記法においては，座標は

$$x^{\mu} \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, ix, iy, iz) \qquad (2.1)$$

である。ただし

$$
\begin{aligned}
&t: 時刻座標 \\
&c: 真空中の光速度 \qquad (2.2) \\
&i: 単位虚数
\end{aligned}
$$

である。

このように座標系を定め，基本テンソルを

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

とすると，この Riemann 空間のノルム（座標値が微小量だけ異なる2点間の距離の2乗）は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \qquad (2.4)$$

となる。あきらかに，ds^2 は，正にも負にもなりうる。すなわち，この空間は異常 Riemann 空間である。

（2.3）式で表される基本テンソルから作られる行列式は

$$g \equiv \det(\mathrm{mat}(g_{\mu\nu})) = 1 > 0 \qquad (2.5)$$

ただし　det(X)　行列 X の行列式を表す

mat(X)　2階のテンソル X から作られる行列を表す

である。この行列式が，常に正の値をとるにもかかわらず，この空間が異常 Riemann 空間であることがわかる。すなわち，Riemann 空間の性質について，基本テンソルから作られる行列式の符号にのみ注目する議論は，初期の正常空間のみを扱った Riemann 幾何学が「テンソルの成分としては複素数を認めたが，座標については暗黙のうちに実数のみに限っていた」ことを示すものである。

なお，テンソルの縮約に関する Einstein の省略記法･･･上下に同じギリシャ文字の指標

がある場合，その指標の値を０から３まで変化させ和をとる･･･を採用した。(タイプライター等で使用できるフォントが限られていた時代は，この省略記法は拡大解釈されて上下の指標がラテン文字の場合も和をとることがあったが，ギリシャ文字のフォントが普及した現在，和をとることはギリシャ文字の指標の場合に限る。すなわち上下の指標が同じラテン文字の場合は和をとらない･･･単にその指標が上下同じ値を取る成分であることを示す。)

ここで，次のような座標変換を行う。

$$\left.\begin{array}{l} x'^0 = x^0 \\ x'^k = -ix^k\ (\because k \neq 0) \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

すなわち，新しい座標系においては

$$x'^\mu = (ct, x, y, z) \tag{2.7}$$

x^μ系からx'^μ系に移る座標変換において，反変成分に関する変換係数テンソルは

$$M_\mu^\nu \equiv \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -i & & \\ & & -i & \\ 0 & & & -i \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

共変成分に関する変換係数テンソルは

$$\bar{M}_\mu^\nu \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & i & & \\ & & i & \\ 0 & & & i \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

である。これらにより，x'^μ系における基本テンソルは

$$g'_{\mu\nu} = \bar{M}_\mu^\alpha \bar{M}_\nu^\beta g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

(2.4) 式で表されるノルムは，4次元スカラであるから，この変換に対して不変である。

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \qquad (2.11)$$

座標系を (2.7) 式とし，共変基本テンソルを (2.10) 式で表す方式は，L. D. Landauが採用した表記法（｢符号系（＋－－－）｣）であり[3]，現在でもこの表記法を採用している理論物理学者は相当数存在する[4) 5) 6)]。

このように，現代物理学の実数のみを使用する表現の一つが，座標に虚数値を認める表記法と等価であることが示された。

しかしながら，むしろ実際的と考えられている「符号系（－＋＋＋）を持つ計量」は，前記の定義から出発して一般座標変換によって導くことはできない。

すなわち

$$\tilde{x}'^\mu \equiv (\tilde{x}'^0, \tilde{x}'^1, \tilde{x}'^2, \tilde{x}'^3) = (ct, x, y, z) \qquad (2.12)$$

$$\tilde{g}'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

$$d\tilde{s}'^2 = \tilde{g}'_{\mu\nu} d\tilde{x}'^\mu d\tilde{x}'^\nu = -c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \qquad (2.14)$$

は，数学的に (2.1) 式で表される座標系とは，異なる系であって，座標変換で関係付けることはできない。(基本テンソルや座標変数等の上に波型（～）をつけて区別した･･･後述）このノルムは4次元スカラであるから，座標変換に対して不変であって，この符号が反転する座標変換はありえない。たとえば

$$(d\tau)^2 \equiv -(ds)^2 = -g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \tilde{g}'_{\mu\nu} d\tilde{x}'^\mu d\tilde{x}'^\nu \qquad (2.15)$$

と置き換えることは，スカラの定義の変更であって，これに相当する座標変換はない。

すなわち，

$$\hat{x}^\mu = (ict, x, y, z) \qquad (2.16)$$

とおき，これに，x^μ系から座標変換でたどり着いたと仮定すると

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}^0 &= ix^0\\ \hat{x}^k &= -ix^k\ (\because k \neq 0)\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

$$M_\mu^\nu \equiv \frac{d\hat{x}^\nu}{dx^\mu} = \begin{bmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & -i & \\ & & & -i \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$\bar{M}_\mu^\nu \equiv \frac{dx^\nu}{d\hat{x}^\mu} = \begin{bmatrix} -i & & & \\ & i & & \\ & & i & \\ & & & i \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \bar{M}_\mu^\alpha \bar{M}_\nu^\beta g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

となってしまう。(ここで，基本テンソルの符号を反対に定義しなおすと，(2.15) 式のようなスカラの定義の変更になる。)

2.2　Minkowski 座標系（時間軸虚数表示）

他の多くの理論家達によって採用されている「符号系（－＋＋＋）を持つ計量」は，最初の座標系と基本テンソルを次のように設定することによって得られる。

すなわち

$$(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) = (ict, x, y, z) \tag{2.21}$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

とおけば，Riemann 空間のノルムは

$$d\tilde{s}^2=\tilde{g}_{\mu\nu}d\tilde{x}^{\mu}d\tilde{x}^{\nu}=-c^2(dt)^2+(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2 \quad (2.23)$$

となる。(2.22) 式の基本テンソルの各成分は，(2.3) 式と同じであるが，同じ基本テンソルではない。(基本テンソルの設定と座標の定義はセットになっていなければならない。)

このように設定した場合

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x}'^{0}&=-i\tilde{x}^{0}\\ \tilde{x}'^{k}&=\tilde{x}^{k}(\because k\neq 0)\end{aligned}\right\} \quad (2.24)$$

とすれば

$$\tilde{x}'^{\mu}=(ct, x, y, z) \quad (2.25)$$

$$\tilde{M}_{\mu}^{\nu}\equiv\frac{\partial\tilde{x}'^{\nu}}{\partial\tilde{x}^{\mu}}=\begin{bmatrix}-i & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\bar{\tilde{M}}_{\mu}^{\nu}\equiv\frac{\partial\tilde{x}^{\nu}}{\partial\tilde{x}'^{\mu}}=\begin{bmatrix}i & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{bmatrix} \quad (2.27)$$

より

$$\tilde{g}'_{\mu\nu}=\bar{\tilde{M}}_{\mu}^{\alpha}\bar{\tilde{M}}_{\nu}^{\beta}\tilde{g}_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}-1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{bmatrix} \quad (2.28)$$

となる。

このように，座標系を (2.25) 式，Minkowski 座標系の基本テンソルを (2.28) 式の形にとる表記法は現在の理論物理学の一般的表記法のひとつであり多くの著者達がこれを採用している[7) 8) 9) 10) 11) 12) 13)]。これは，空間–空間成分を抜き出せば，直ちに3次元理論に移行できる利点を持つ。この観点から，私も従来はこの表記法を採用してきたが，本論文に

おいては，宗旨を変更しLandau型の採用に踏み切った。(次章参照)

以上の二つの表現は，座標変換で関連付けられないため，数学的に異なる表現法である。これが，直ちに物理学的に意味が異なる表現であるとは断言できないが，このことを常に頭においておく必要がある。(異なる表記法を採用している二つの式を検討する場合に，単純に座標変換して等しくなるかどうかを論じてはいけない。)

この章についてあまりにも数学的であるという批判があるかもしれないが，初学者はしばしばこういう点で混乱するのである。

3.　Lorentz変換と虚角回転

いままで，私は，もっぱら「符号系（−＋＋＋）を持つ計量」を使用してきた。しかし，「Lorentz変換が虚角回転である」という見地から，Minkowskiの原案（座標値に虚数を導入する）に戻るべきであるというかねてからの懸案と，第2章の議論を勘案して次のような結論に達した。

1．座標変数に，虚数を導入する場合は，空間軸のほうに導入したほうがLorentz変換を説明しやすい。

2．座標変数を，実数のみに限る場合は，「符号系（＋−−−）を持つ計量」･･･Landauが使用した計量･･･を使用すると，1と関連付けが簡単である。

Lorentz変換が虚角回転に相当することは，簡単な演習問題であるので誰でも気がつく事であるが，座標に実数のみを用いているとなかなか合理的に説明ができない。

ここで，座標の表記法を確認する。空間軸に虚数を使用したMinkowski座標系を出発点とする。

Minkowski座標系を

$$x^{\mu} = (ct, ix, iy, iz) \qquad (3.1)$$

この系の基本テンソルを

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

とする。この系は，第2章の議論により

$$\left.\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \\ x'^k &= -ix^k (\because k \neq 0) \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

すなわち

$$x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (ct, x, y, z) \qquad (3.4)$$

のごとくに座標変換すれば，Landau 型の基本テンソルを持つ系に移行する。

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

この，座標変数を実数化した座標系も，通常 Minkowski 座標系と呼ばれるが，区別が必要なときは，以下において（実数化に二通りあることを区別する意味をこめて）Minkowski-Landau 座標系と呼ぶ。

なお，本論文においては，曲線座標系や平坦でない座標系をあからさまには論じていないが，座標系と時空を次のように使い分ける。空間部分がデカルト座標系または，（座標変数のとる値が，単に純虚数に限られるという意味で）それと等価な座標系の場合，Minkowski 座標系という言葉を使用する。これらの座標系から，座標変換で得られた4次元座標系を同じ冠をつけて Minkowski 時空と呼ぶ。たとえば，空間部分が円筒座標系の場合，「空間部分が円筒座標系である Minkowski 時空」という。

x'^μ 系においては Lorentz 変換は次の形の変換である。z 軸の正の方向に速度 v で移動する系を $\bar{x}'^\mu$ 系とすると

$$\bar{x}'^\mu = (\bar{x}'^0, \bar{x}'^1, \bar{x}'^2, \bar{x}'^3) = (c\bar{t}', \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}') \qquad (3.6)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}'^0 &= c\bar{t}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}ct - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}z \\ \bar{x}'^1 &= \bar{x}' = x \\ \bar{x}'^2 &= \bar{y}' = y \\ x'^3 &= \bar{z}' = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}ct + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}z \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

ただし

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{3.8}$$

である。

一般には，座標の微分が反変ベクトルであり，座標そのものは反変ベクトルではないが，Minkowski 座標系では，座標自体が反変ベクトルである。

Lorentz 変換は，反変成分に対して

$$L_{\mu}^{\nu} \equiv \frac{\partial \bar{x}'^{\nu}}{\partial \bar{x}'^{\mu}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

共変成分に関して

$$\bar{L}_{\mu}^{\nu} \equiv \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial \bar{x}'^{\mu}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

である。Lorentz 変換に対して，(3.5) 式で示される基本テンソルは不変である。

$$\bar{g}'_{\mu\nu} = \bar{L}_{\mu}^{\alpha} \bar{L}_{\nu}^{\beta} g'_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

ここで

$$\eta \equiv \tanh^{-1}\beta \tag{3.12}$$

とおくと

$$\left.\begin{aligned} \cosh\eta &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \sinh\eta &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

である。これにより，Lorentz 変換は

$$L_\mu^\nu = \begin{bmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & -\sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$\bar{L}_\mu^\nu = \begin{bmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & \sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

となる。

上記の考察だけでも，この変換が虚角回転に相当することは推定できるが，これは x^μ 系で検討すれば，非常にあきらかになる。

x^μ 系の中で，z 軸の正の方向に速度 v で移動している系を $\bar{x}^\mu$ 系とすると

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}^0 &= c\bar{t} = \cosh\eta\, x^0 + (i\sinh\eta)(iz) \\ \bar{x}^1 &= i\bar{x} = ix \\ \bar{x}^2 &= i\bar{y} = iy \\ \bar{x}^3 &= i\bar{z} = -i\sinh\eta\, x^0 + \cosh\eta\,(iz) \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

となる。変換に関連する軸だけ抜き出すと

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}^0 &= c\bar{t} = \cosh\eta\, x^0 + (i\sinh\eta)\, x^3 \\ \bar{x}^3 &= i\bar{z} = -i\sinh\eta\, x^0 + \cosh\eta\, x^3 \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

一方

$$\begin{aligned}\sin(i\eta) &= \frac{e^{i(i\eta)}-e^{-i(i\eta)}}{2i} = i\,\frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{2} \\ &= i\sinh\eta\end{aligned} \tag{3.18}$$

である。同様にして

$$\cos(i\eta)=\cosh\eta \tag{3.19}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}^0 &= \cos(i\eta)\,x^0+\sin(i\eta)\,x^3 \\ \bar{x}^3 &= -\sin(i\eta)\,x^0+\cos(i\eta)\,x^3\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

となる。

これは，（物理学的意味はさておき）数学的には，第０軸と第３軸に関する Lorentz 変換は，(x^0, x^3) 平面における虚角回転の式であることを示す。

x^μ 系における Lorentz 変換は，反変成分に対して

$$L^\nu_\mu \equiv \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} = \begin{bmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & i\sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

（μ 列 ν 列表示…以下同様）

共変成分に対して

$$\bar{L}^\nu_\mu \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \begin{bmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & -i\sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

となる。（ただし簡単のため，Lorentz 変換を表す文字には特に文字かざりを追加しなかった。）

この虚数を用いた Minkowski 時空の基本テンソル（3.2）も，虚数を用いた Lorentz 変

換に不変である。

$$g'_{\mu\nu}=\bar{L}^{\alpha}_{\mu}\bar{L}^{\beta}_{\nu}g_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{bmatrix}\tag{3.23}$$

このように，虚数を使用したMinkowskiの原案と理論上同じ表記法でEinsteinの特殊相対性理論は記述できる。このことは，20世紀初頭には当然であったことであり，現代でも当然のことと思われるが，最近の教科書レベルの参考書においては，このあたりの記述が少ないため，次章の準備のためにあえてここに掲げる。

なお，Minkowski時空から，Minkowski-Landau時空への変換の際，座標変換の際の変換係数テンソルから作られる行列の行列式が

$$\left.\begin{aligned}M&\equiv\det(\mathrm{mat}(M^{\nu}_{\mu}))=i\\\bar{M}&\equiv\det(\mathrm{mat}(\bar{M}^{\nu}_{\mu}))=-i\end{aligned}\right\}\tag{3.24}$$

のごとくに純虚数になるため，重みが奇数のテンソル密度（Levi-Civitaの記号等）に関しては，さらに議論が必要であると思われるが，本論文ではこの件について論じない。

4. Riemann空間のノルム

前章においては，Riemann空間のノルム（座標が微小量だけ異なる2点間の距離の2乗）は次の形をしていると考えた。

$$ds^2\equiv g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}\tag{4.1}$$

これは，Minkowskiの考えを素直にRiemann幾何学化するとこうなるということであって，前章までの段階では，この式を具体的な計算に使用してはいない。

重力場の存在を考えない特殊相対論では，ノルムに関する議論は，ほとんど無視されるが，本来は特殊相対論から一般相対論への移行はシームレス（継ぎ目なし）に行われるべきである。重力場の影響を考えるか考えないかによって，理論式の構成が大きく変わることは好ましくない。重力場の理論としてみた場合のEinsteinの一般相対論が必ずしも全面的には支持されていない現状も，この不統一の一因であろう。ここでは，電磁場の理論を含めた物理学の理論のRiemann幾何学的表現を主題とする。

かつて，私は，「異常Riemann空間においては，測地線の方程式がほとんど意味を失う」

ことに，不審の念を抱いた。変分法でノルムを用いて第1次の変分をゼロとおいて式を導いているのに，このノルムの変域が正定値（positive definite）でないとは不可解である。(慎重な著者達は，測地線の理論を記述する際この点をいろいろと論じているが。)

第2章で述べたとおり，座標変数に純虚数を導入した場合，「Riemann 空間が正常か？異常か？」の議論は，基本テンソルから得られる行列式の符号の問題ではない。

そうであれば，理論の根幹部分を見かけ上保ちながら，ノルムを変更する手段がある。ここで，次のようなノルムについて検討してみよう。

$$|ds|^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^{\mu} \overline{dx^{\nu}} \tag{4.2}$$

ここで，上付きの線は共役複素数を示す。すなわち

$$Z = a + ib \tag{4.3}$$

のとき

$$\overline{Z} = a - ib \tag{4.4}$$

である。ただし，a，b は実数とする。

ここで，基本テンソルの満たすべき条件を考えよう。(4.2) 式の右辺が常に正の実数であるためには

$$g_{kk} dx^k \overline{dx^k} : real\ and\ positive \tag{4.5}$$

$$g_{jk} dx^j \overline{dx^k} + g_{kj} dx^k \overline{dx^j} : real\ and\ positive \quad (where \quad j \neq k) \tag{4.6}$$

であれば充分である。

(4.6) 式が成立するためには

$$\overline{g_{jk} dx^j \overline{dx^k} + g_{kj} dx^k \overline{dx^j}} = g_{jk} dx^j \overline{dx^k} + g_{kj} dx^k \overline{dx^j} \tag{4.7}$$

である必要がある。(負の実数になる可能性もあるから，これは充分条件ではない。なお，上下の指標に同じラテン文字が現れる場合には，和をとらないことに注意せよ。)

このためには

$$\begin{aligned}&\overline{g_{jk}dx^j\overline{dx^k}+g_{kj}dx^k\overline{dx^j}}\\&\quad=\overline{g_{jk}}\,\overline{dx^j}dx^k+\overline{g_{kj}}\,\overline{dx^k}dx^j=\overline{g_{kj}}dx^j\overline{dx^k}+\overline{g_{jk}}dx^k\overline{dx^j}\end{aligned}\tag{4.8}$$

であるから

$$\therefore \overline{g_{\mu\nu}}=g_{\nu\mu}\tag{4.9}$$

であるとよい。(すなわち，基本テンソルの作る行列がエルミート行列であるとよい。)

しかし，これは，(4.2) 式の右辺が，正の実数であるための必要条件ではない。この条件が必要ではないのは，次のような場合があるからである。

$$g_{jk}dx^j\overline{dx^k}+g_{kj}dx^k\overline{dx^j}=0\tag{4.10}$$

すなわち，本論文で論じているように，時間座標は実数，空間座標は（一般の複素数ではなく）純虚数に拘束されている場合

$$\begin{aligned}&g_{kk}: real\ and\ positive(where\ \ k=0,1,2,3)\\&g_{jk}: real\ number(where\ \ j\neq 0,\ k\neq 0\ and\ j\neq k)\end{aligned}\tag{4.11}$$

の場合

$$g_{0k}=g_{k0}\ (where\ \ k\neq 0)\tag{4.12}$$

でさえあれば，この値が一般の複素数であっても

$$g_{0k}\,dx^0\overline{dx^k}+g_{k0}dx^k\overline{dx^0}=0\ (\because k\neq 0)\tag{4.13}$$

となり，(4.2) 式の右辺はひとまず実数となる。(正であるという一般的証明は難しいが,

基本テンソルが，ある座標系で対角項のみ値を持つときは，必ず正の実数となる。）

多くの，実際的問題において，基本テンソルは対称であると仮定される。

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{4.14}$$

本論文においても，（エルミート行列は目指さず）対称テンソルを踏襲する。（このほうが手馴れた条件なので，まず採用したというのが真相に近い。）

affine 接続係数 Γ^i_{jk} については，従来と同様に

$$\begin{gathered} D_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \\ D_\alpha : x^\alpha \text{軸に関する共変微分演算子} \end{gathered} \tag{4.15}$$

によって定めるものとする。

$$\begin{aligned} D_i g_{jk} &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^\mu_{ij} g_{\mu k} - \Gamma^\mu_{ik} g_{j\mu} \\ &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma_{k,ij} - \Gamma_{j,ik} \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\because \Gamma_{k,ij} = g_{k\alpha} \Gamma^\alpha_{ij} \tag{4.17}$$

より，affine 接続係数は

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \tag{4.18}$$

$$\therefore \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\mu}\left(\frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\mu}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\mu} \right) \tag{4.19}$$

となる。ただし，基本テンソルが対称である条件を使用した。また，この時空では afffine 接続係数の各成分が一般には複素数であることに注意せよ。

これによって，主要な微分公式には変更はない。たとえば，任意の２階の反変テンソル

について

$$D_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{g}\,T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}T^{\alpha\nu} \tag{4.20}$$

である。

ノルムの変更によって，直接影響を受けるものは，測地線の方程式である。

$$ds \equiv \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu\overline{dx^\nu}} \tag{4.21}$$

とし

$$\begin{aligned} F &\equiv \int_{\lambda 1}^{\lambda 2} ds = \int_{\lambda 1}^{\lambda 2}\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu\overline{dx^\nu}} \\ &= \int_{\lambda 1}^{\lambda 1}\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\overline{dx^\nu}}{d\lambda}}\,d\lambda \end{aligned} \tag{4.22}$$

である。ただし，λ は，測地線上のパラメータで正の実数であるとする。

この作用積分の1次の変分をゼロとするように，測地線の方程式を定めるとよいが，共役複素数の積の形の扱いが厄介である。

以下において，もはや Minkowski 座標系ではなく，また平坦な時空でもないかもしれない例を扱う。

しかし，まだ，座標系は

$$\begin{aligned} x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) &= (u^0, iu^1, iu^2, iu^3) \\ (where\quad u^k&: real\ number) \end{aligned} \tag{4.23}$$

という制約がかかっているものとする。この場合

$$\overline{x^\mu} = (\overline{x^0}, \overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}) = (u^0, -iu^1, -iu^2, -iu^3) \tag{4.24}$$

である。一般の座標系であるから，反変ベクトルとなるのは座標ではなく座標の微分である。

$$\left.\begin{aligned} dx^\mu &= (du^0,\ idu^1,\ idu^2,\ idu^3) \quad (a) \\ \overline{dx^\mu} &= (du^0, -idu^1, -idu^2, -idu^3) \quad (b) \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

ここで

$$\overline{dx^{\mu}} = \Delta^{\mu}_{\alpha} dx^{\alpha} \tag{4.26}$$

とする。ただし

$$\Delta^{\nu}_{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

である。これは，「空間軸反転テンソル」とでも言うようなテンソルである。

$$\begin{aligned} |ds|^2 &\equiv g_{\mu\nu} dx^{\mu} \overline{dx^{\nu}} \\ &= g_{\mu\nu} dx^{\mu} \Delta^{\nu}_{\alpha} dx^{\alpha} = \zeta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\because \zeta_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \Delta^{\alpha}_{\nu} \tag{4.29}$$

このテンソルは，擬似基本テンソルとでも言うべきもので，測地線の方程式の計算に限り，基本テンソルの役目を担う。

ただし，一般には，(4.29) 式の操作のために，この座標系で

$$\zeta_{k0} = -\zeta_{0k} = g_{k0} = g_{0k} \tag{4.30}$$

となり，一般には

$$\because \zeta_{\nu\mu} \neq \zeta_{\mu\nu} \tag{4.31}$$

である。このテンソルの成分を書き下しておく。

$$\zeta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \zeta_{00} & \zeta_{01} & \zeta_{02} & \zeta_{03} \\ \zeta_{10} & \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} \\ \zeta_{20} & \zeta_{21} & \zeta_{22} & \zeta_{23} \\ \zeta_{30} & \zeta_{31} & \zeta_{32} & \zeta_{33} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

ここで，次のように座標変換する。

$$\left.\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \\ x'^k &= -ix^k \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

この形の変換は，第 2 章ですでに扱った。((2.8)，(2.9) 式)

$$x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (u^0, u^1, u^2, u^3) \tag{4.34}$$

とすると，共変指標に関する変換係数テンソルは

$$\bar{M}_\mu^\nu \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & i & & \\ & & i & \\ 0 & & & i \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

となる。

元の系から時間と空間が混合しないような変換のみで到達できる系においては

$$\zeta'_{\mu\nu} = \bar{M}_\mu^\alpha \bar{M}_\nu^\beta \zeta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \zeta_{00} & i\zeta_{01} & i\zeta_{02} & i\zeta_{03} \\ i\zeta_{10} & -\zeta_{11} & -\zeta_{12} & -\zeta_{13} \\ i\zeta_{20} & -\zeta_{21} & -\zeta_{22} & -\zeta_{23} \\ i\zeta_{30} & -\zeta_{31} & -\zeta_{32} & -\zeta_{33} \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

である。(上式を見て，このテンソルは対称であると考えてはいけない。(4.30) 式参照)

かくして

$$|ds|^2 \equiv \zeta'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} du^\mu du^\nu \tag{4.37}$$

となる。

ここで，$\zeta'_{\mu\nu}$の反対称成分は $|ds|^2$ に寄与しないので

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \frac{\zeta'_{\mu\nu} + \zeta'_{\nu\mu}}{2} \tag{4.38}$$

とおいた。なお，このテンソルは基本テンソルではない。しかし，従来の方法を利用して測地線の方程式を計算できる[14)]。

作用積分は

$$F \equiv \int_{\lambda 1}^{\lambda 2} ds = \int_{\lambda 1}^{\lambda 2} \sqrt{\eta_{\mu\nu} du^{\mu} du^{\nu}} = \int_{\lambda 1}^{\lambda 1} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{du^{\mu}}{d\lambda} \frac{du^{\nu}}{d\lambda}} d\lambda \qquad (4.39)$$

である。ここで

$$\dot{x}^{\mu} \equiv \frac{du^{\mu}}{d\lambda} \qquad (4.40)$$

とおくと

$$\therefore\ F = \int_{\lambda 1}^{\lambda 2} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{u}^{\mu} \dot{u}^{\nu}} d\lambda \qquad (4.41)$$

となる。ここで，F の変分をゼロとする条件を求めると，u^{μ} と $\dot{u}^{\mu}$ を独立な汎関数とみなして

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^{\alpha}}\right) - \frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}} = 0 \qquad (4.42)$$

の形の式を得る（Euler の式）。

この式の第 1 項の括弧の中は

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^{\alpha}} = \frac{2\eta_{\mu\alpha} \dot{u}^{\mu}}{2\sqrt{\eta_{\mu\nu} d\dot{u}^{\mu} d\dot{u}^{\nu}}} = \frac{\eta_{\mu\alpha} \dot{u}^{\mu}}{\dfrac{ds}{d\lambda}} \qquad (4.43)$$

となる。ただし

$$I_1 \equiv \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^{\alpha}}\right) = \frac{\dfrac{d}{d\lambda}(\eta_{\mu\alpha} \dot{u}^{\mu}) \dfrac{ds}{d\lambda} - \eta_{\mu\alpha} \dot{u}^{\mu} \dfrac{d^2 s}{d\lambda^2}}{\left(\dfrac{ds}{d\lambda}\right)^2} \qquad (4.44)$$

である。

ここで

$$\frac{d}{d\lambda}(\eta_{\mu\alpha} \dot{u}^{\mu}) = \frac{\partial \eta_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{du^{\beta}}{d\lambda} \frac{du^{\mu}}{d\lambda} + \eta_{\mu\alpha} \ddot{u}^{\mu} \qquad (4.45)$$

ただし，x^{β} の関数 f に関して

$$\frac{\partial f(x^{\beta})}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \qquad (4.46)$$

である関係を利用した。

$$\ddot{u}^{\mu}=\frac{d^2u^{\mu}}{d\lambda^2} \qquad (4.47)$$

$$\begin{aligned}\therefore I_1&=\frac{\eta_{\mu\alpha}\ddot{u}^{\mu}+\dfrac{\partial\eta_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}}\dfrac{du^{\beta}}{d\lambda}\dfrac{du^{\mu}}{d\lambda}}{\dfrac{ds}{d\lambda}}-\frac{\dfrac{d^2s}{d\lambda^2}}{\left(\dfrac{ds}{d\lambda}\right)^2}\eta_{\mu\alpha}\dot{u}^{\mu}\\&=\frac{\eta_{\mu\alpha}\ddot{u}^{\mu}+\dfrac{\partial\eta_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}\dfrac{du^{\nu}}{d\lambda}\dfrac{du^{\mu}}{d\lambda}}{\dfrac{ds}{d\lambda}}-\frac{\dfrac{d^2s}{d\lambda^2}}{\left(\dfrac{ds}{d\lambda}\right)^2}\eta_{\mu\alpha}\dot{u}^{\mu}\end{aligned} \qquad (4.48)$$

なお，ここで，後の処理のためダミーの指標を書き換えた。

一方，Eulerの式の第2項は

$$I_2\equiv-\frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}}=-\frac{\dfrac{\partial\eta_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\dot{u}^{\mu}\dot{u}^{\nu}}{2\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{u}^{\mu}\dot{u}^{\nu}}}=-\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial\eta_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\dot{u}^{\mu}\dot{u}^{\nu}}{\dfrac{ds}{d\lambda}} \qquad (4.49)$$

となる。

Eulerの式の左辺をIとすると

$$I=I_1+I_2=0 \qquad (4.50)$$

$$\therefore\eta_{\mu\alpha}\ddot{u}^{\mu}+\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial\eta_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\eta_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\dot{u}^{\mu}\dot{u}^{\nu}-\frac{\dfrac{d^2s}{d\lambda^2}}{\dfrac{ds}{d\lambda}}\eta_{\mu\alpha}\dot{u}^{\mu}=0 \qquad (4.51)$$

である。ここで

$$\lambda=s \qquad (4.52)$$

とすると，第3項はゼロとなる。

$$\therefore\eta_{\mu\alpha}\ddot{u}^{\mu}+\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial\eta_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\eta_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\dot{u}^{\mu}\dot{u}^{\nu}=0 \qquad (4.53)$$

しかし，$\eta_{\mu\nu}$が基本テンソルではないので，これ以上まとめることはできない。

微分記号を使用して書き直すと

$$\eta_{\mu\alpha}\frac{d^2u^\alpha}{d\lambda^2}+\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial\eta_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial\eta_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{du^\mu}{d\lambda}\frac{du^\nu}{d\lambda}=0 \qquad (4.54)$$

となる。

複素数を導入したため，基本テンソルはエルミート対称である可能性が出てきたが，この計算ではあくまでも対称の場合に限っている。

一般の場合は，予想がつかないが，出発点の系の基本テンソルが対角項にのみ成分を持つときは，擬似基本テンソルを（測地線の計算に限り），基本テンソルとみなした場合と同様な結果が得られると推定できる。

5. まとめと今後の問題点

Minkowskiの原案の「座標変数の一部を虚数に限定する表現方式」によると，Lorentz変換を虚角回転として非常に明瞭に説明できる。

しかし「座標変数に虚数を導入する」という古典的問題は，かならずしも簡単ではない。まず，現象論的議論･･･そのようにすると，簡潔に表現できるという意･･･はできるが，物理的気味が不明である。「なぜ，ある座標軸の座標変数が実数であり別の座標軸の座標変数が虚数か？」判然としない。また，今回の試行の範囲でも従来の実数のみを使用する理論と関連付けようとすると座標変換の係数テンソルの行列式が純虚数になってしまう。この解釈は，今後さらに検討する必要があるであろう。

ノルムを正定値にする試行（第4章）は，まだ先の見通しはよくわからない。本論文では省略したが，検討した範囲では電磁場の方程式等は変化がない。しかし，この試行は特殊相対論と矛盾する可能性がある。(空間軸反転テンソルが，特定の座標系で簡単な形をとる。) これについては，さらに検討を続ける方針である。

参考文献

1） H. Minkowskiの講演
物理学史刊行会編　「相対論」
p87　6「相対性原理」　H. Minkowski著　上川友好訳

原文 "Das Relativitätsprinzip" Annalen der Phisik, 4. Folge, 47, 927~938 (1915)

1907年11月5日 Göttingen 数学会の講演を後に収録したもの。

p101 7「空間と時間」 H. Minkowski 著 上川友好訳

原文 "Raum und Zeit" Jahresbericht der Deutshen Mathematiker Vereiningung, 18, 75~88 (1908)

1908年9月21日 Kölnの第80回自然科学者大会講演を収録したもの。

これらの講演には，すでに，4次元空間の概念が見られるが，次の文献2）によれば，Minkowskiが，4次元空間論を発表したのは，1909年とされる。

2）砂川重信 「理論電気磁気学」第3版 第11章 特殊相対性理論 紀伊国屋書店 1999

3）L. D. Landau and E. M. Lifshitz "Classical Theory of Fields" Fourth Revised English Edition (Translated from Russian by H. Hamermesh) PERGAMON PRESS 1975（ロシア語版第6版の英訳）

この文献のNOTAITIONの項にWe use the metric with signature（＋－－－）と表記されている。

日本語訳（ただし，ロシア語第6版から直接訳されたもの）

ランダウ＝リフシッツ著 佐藤敏彦 広重 徹 訳「場の古典論」（原書第6版）東京図書 1994

上記の部分は「符号系（＋－－－）を持つ計量を採用する」と訳されている。

4）M. Carmeli "Classoal Theory — General Relativity and Gauge Theory — " JOHN WILY & SONS p32

5）戸田盛和 「相対性理論30講」 p108 朝倉書店 1999

6）松田卓也 二間瀬敏史 「なっとくする相対論」p98 講談社 1999

7）Misner, Thorn, Wheeler 共著 "GRAVITATION", W. H. FREEMAN AND COMPANY 1973

8）平川浩正 「相対論」第2版 p86 共立出版 1986

9）冨田憲二 「相対性理論」 p12 丸善 1990

10）藤井保憲 「時空と重力」 p17 産業図書 1994

11）藤井保憲 改定版「相対論」 p138 放送大学教育振興会

12）佐藤勝彦 「相対性理論」 p30 岩波書店 2000

13）佐藤文隆 小玉英雄 「一般相対性理論」 岩波書店 2000

Minkowski時空の基本テンソルは明記されていないが，他の時空の基本テンソル（計量テンソル）の形から（－＋＋＋）型である。

14）矢野健太郎 「Riemann幾何学入門」 p58 森北出版 1990