

# ニュートンのクーリングの式の検討及び1 m 深 地温分布の図式解法と川湯地域への適用

和田 昭 夫

## Abstract

- (1). The author concluded that Newton's cooling equation can be applicable at that condition in which the temperature of the earth surface and air is limited within about  $-10^{\circ}\text{C}$  to  $30^{\circ}\text{C}$  from the calculation using Stefan-Boltzmann's law etc., to the cooling of the earth surface.
- (2). One dimensional RC networks showed that observed 1 m depth's soil temperature minus that of ordinary location is the temperature owing to subsoil heat source, if the depth of the upper surface of heat source is larger than 5 m.
- (3). Calculating graph shows the soil temperature distribution of 1 m depth which is effected by the upper plane surface of heat source that contact the earth surface with small angle.
- (4). Application of above conclusions was made to Kawayu district, Hokkaido. In it, the author introduced the apparent cooling constant,  $h' = I/L'$  where  $L'$  is the depth of the summit of heat source.

## 1. 序 言

地表の冷却は、伝導、輻射、対流、水分の蒸発によって生ずる。筆者は、地表附近に於て空気の流れを層流とし、対流を無視して、伝導、輻射、蒸発の解析から、普通良く使われるニュートンのクーリングの式が、蒸発を除いて考えれば、通常的地温及び気温に於て、地表の冷却を表わす式としてかなりの精度を持つ近似式であることを確かめた。次に、熱源の上面が平面であり、且つ地表とわずかの角度で交る場合の1 m 深地温を図式的に求め、その結果を川湯地域に適用した。その際、熱源の最も浅い部分から地表迄の影響をクーリング常数に含め、みかけの冷却常数とする試みを行なった。

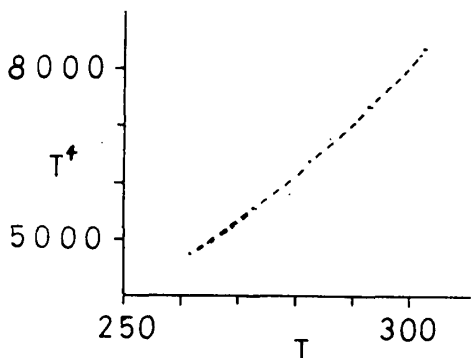
## 2. ニュートンのクーリングの式の検討

土の表面には、粘性の為動かない空気の薄層が存在する。その厚さは分子の平均自由行路の2～3倍である。その上の空気の地表附近での流れは、<sup>(1)</sup> 地表面に平行とする。従って、地表の冷却を以下の様に論ずる場合、対流の効果は存在しない。地表上に存在する不動の空気の薄層は、地表温度と同一温度であるとする。以上より、地表からの冷却の問題は、地表上の空気の薄層とその上の空気との間の輻射、地表からの水分の蒸発、地表上の空気の薄層の分子からその上の空気の分子への、分子同志の接触による運動エネルギーの移動、即ち伝導の問題となる。

### 1) 輻 射

空気を灰色輻射をする物体即ち灰色物体の如くみなして、 $E = \epsilon\sigma T^4 \dots \dots (1)$  とすることができ

(2) 但し、 $E$ : 単位面積から単位時間に放射する輻射エネルギー  $\sigma$ : 常数  $T$ : 空気の絶対温度  $\epsilon$ : 空気に関する常数 (1)式を用いると、地表上の空気の薄層とその上の空気との間の輻射エネルギーの交換から、見かけ上、薄層の放射する輻射エネルギー、 $E_s$  は次式で与えられる。



第 1 図

$E_s = \epsilon\sigma T_s^4 - \epsilon\sigma T_a^4 \dots\dots(2)$  ここで、 $T_s$ : 地表上の空気の薄層の絶対温度  $T_a$ : 薄層の上の地表近くの空気の絶対温度

ところで、第 1 図に示す様に、一般的に予想される  $T_s$  と  $T_a$  を両方含む変域で、かなりの精度で  $T_a \doteq aT_s + b \dots\dots(3)$  が成立する。但し、 $a, b$ : 常数  $T: T_s$  或いは  $T_a$ , (3)式を(2)式に代入すると、 $E_s \doteq a'(T_s - T_a) \dots\dots(4)$  が成立する。但し、 $a' = \epsilon\sigma a$  (4)式はニュートンのクーリングの式と同形である。

2) 伝 導

地表上の空気の薄層から、その上の空気分子が接触面に於て平均  $v_a$  の速度を得たとする。その時、次式が成立する。

$T_a \propto \frac{1}{2}mv_a^2 \quad T_s \propto \frac{1}{2}mv_s^2 \quad K_e \propto v_a - v_s \dots\dots(5)$  但し、 $m$ : 空気の分子の質量  $v_s$ : 薄層の空

気の平均速度  $K_e$ : 薄層からその上の空気へのみかけの熱伝導度

(5)式から、 $K_e \propto \sqrt{T_a} - \sqrt{T_s} \dots\dots(6)$  を得る。

1), に於けると同様の議論から、 $K_e \doteq C(T_s - T_a) \therefore Q \doteq D(T_s - T_a) \dots\dots(7)$  を得る。但し、 $Q$ : 地表から伝導によって発散する熱量  $D, C$ : 常数 (7)はニュートンのクーリングの式と同型である。

3) 蒸 発

筆者は以前にこの問題を扱い、蒸発を含めたみかけの冷却常数  $h'$  を次式で与えた。<sup>(3)</sup>

既報の中の(12)式から、 $h' = h + \frac{s(v-d)}{v-v_a} \dots\dots(8)$  を得る。但し、 $h$ : 冷却常数  $s$ : 熱拡散係数

及び地上 2m の風速の函数  $d$ : 水面に於ける平均の飽和蒸気と露点に於ける 空気の平均水蒸気圧の函数  $v$ : 地表面温度  $v_a$ : 気温

この場合、みかけの冷却常数は地表面温度及び気温の函数となり、任意の地表面温度及び気温で一定値として定まるニュートンのクーリング常数に対応する値は存在しない。

3. 地下熱源のみによる 1m 深地温

一様な地層に於て、上面が地表面に平行な平面である地下熱源と気温の影響を含む実際の場合の 1m 深地温は、次の方程式及び境界条件を満足する。

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} &= h(v-v_a) \\ x=D, \quad v &= T_0 \\ 0 < x < D, \quad \frac{\partial v}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)$$

但し、 $x$ : 地表からの深さ  $v$ : 地温  $h$ : 冷却常数  $D$ : 熱源の深さ  $T_0$ : 熱源の温度  $K$ : 熱拡散係数

(9)を次の(10)と(11)に分解する。

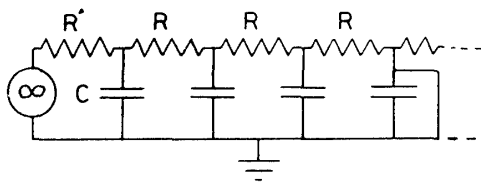
$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} &= hv_1 \\ x=D, \quad v &= T_0 \\ 0 < x < D, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} &= h(v_2 - v_s) \\ x=D, \quad v &= 0 \\ 0 < x < D, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

熱源が存在しない場合、即ち、気温のみによる1m 深地温は、normal 地温とよばれている。それは次の(12)を満足する。

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} &= h(v_s - v_s) \\ x > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

従来、熱源のみによる1m 深地温は  $(v-v_s)_{x=100} \dots\dots(13)$  で与えられていたが、理論的にはそれは  $(v-v_2)_{x=100} \dots\dots(14)$  で与えられ、(13)は近似値である。その近似の度合は  $v_s$  の  $v_2$  に対する近似の度合で決る。それを求める為に、第2図に示す回路で種々の熱源の深さに於ける  $v_2$  の1mに於ける値を求めた。ここで、 $D=10$  mに於ける  $(v_2)_{x=100}$  を  $v_n$  とし、 $(v_n)_{x=100}$  とした。又、種々の  $D$  に於ける  $(v_2)_{x=100}$  の年変化の位相差(気温の年変化に対する)を求めた。その際、気温の年変化は正弦波で表現されるとした。



第2図 一次元RC回路網

第2図に於る回路が、 $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{RC} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$  を満足し、非定常熱伝導の式  $\frac{\partial v}{\partial t} = K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  に対応することは既に知られている。回路は、 $1 K\Omega$  の抵抗がと  $0.001 \mu F$  のコンデンサーが各々30個、 $10 K\Omega$  の抵抗と  $0.01 \mu F$  のコンデンサーが各々20個より

なり、 $10 K\Omega$  が1mに相当する。使用した交流の周波数は420 cycleである。その時、熱拡散係数、 $K$ の値は0.014となる。この値は、一般の岩石の熱拡散係数の値に近い<sup>(4)</sup>。測定結果を第1表に示す。

|                |      |      |      |      |      |      |
|----------------|------|------|------|------|------|------|
| $D$ (m)        | 2    | 3    | 4    | 5    | 7    | 10   |
| $v_2^{(1)}/A$  | 0.45 | 0.61 | 0.67 | 0.67 | 0.65 | 0.65 |
| $\sin \varphi$ | 0.15 | 0.23 | 0.28 | 0.30 | 0.35 | 0.33 |
| $\varphi^0$    | 9    | 13   | 16   | 18   | 21   | 19   |

第1表 RC回路網より解析して求められた

$K=0.014$  の時の1m 深の地温と位相差。

$D$ : 熱源の深さ,  $v_2^{(1)}$ : 1m 深の  $v_2$

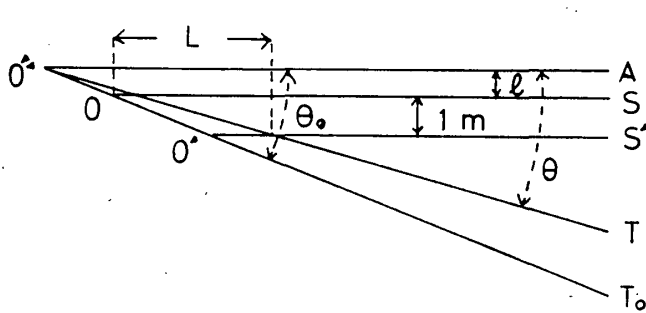
$A$ : 気温の最大振幅,  $\varphi^0$ : 位相角(度)

表より、5m 以深で、 $v_2^{(1)}$ (1m 深の  $v_2$ )  $\div v_n^{(1)}$ (1m 深の  $v_s$ ) となる。即ち、熱源の深さが5m 以上であれば normal 地温を引くことにより、近似的に熱源のみによる1m 深地温が求まる。

表層が土壌である一般の場合は、一般に土壌の  $K$  は岩石のそれより小さいから、近似により正確になる。

4. 上面が平面の熱源で地表と比較的小さい角度をなしている平面の熱源の場合の 1 m 深地温の図式解

この解法は既に筆者が発表している<sup>(5)</sup>。ここで、その原理を簡単に説明する。



第3図 1 m 深地温を求める為の計算図

第3図に於て、 $\overline{O'T_0}$  を、温度  $T_0$  の等温線、 $\overline{O'A}$  を、温度  $0^\circ\text{C}$  の等温線とする。その間は、一様な熱拡散係数、 $K$  を有する物質が存在するとする。それに於ける任意の場所の温度、 $T$  は次式で与えられる。

$$T = T_0 \times \frac{\theta}{\theta_0} \dots\dots(15)$$

但し、 $\theta_0$  :  $\overline{O'T_0}$  と  $\overline{O'A}$  のなす角

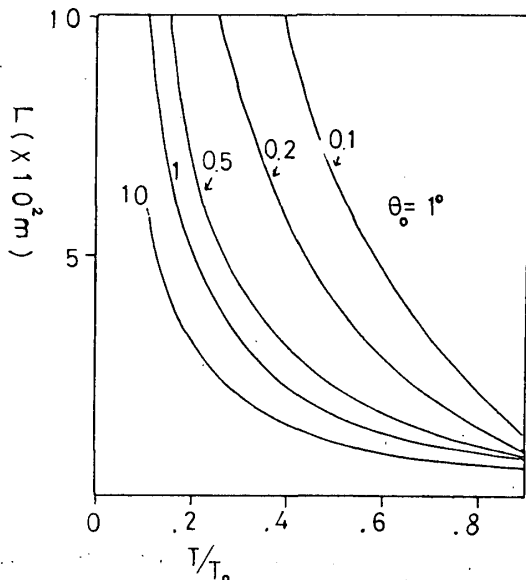
$\theta$  : 測定点と  $O'$  を結ぶ線が  $\overline{O'A}$  となす角

故に等温線は  $\overline{O'A}$  と  $\overline{O'T_0}$  の間の角度を等分する半直線となる。 $\theta_0$  が小さい時、 $\overline{OS}$  から  $\overline{O'A}$  の間の熱流は近似的に  $\overline{OS}$  に垂直である。故に次式が成立する。 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} \doteq \frac{T_{x=0}}{l} \dots\dots(16)$

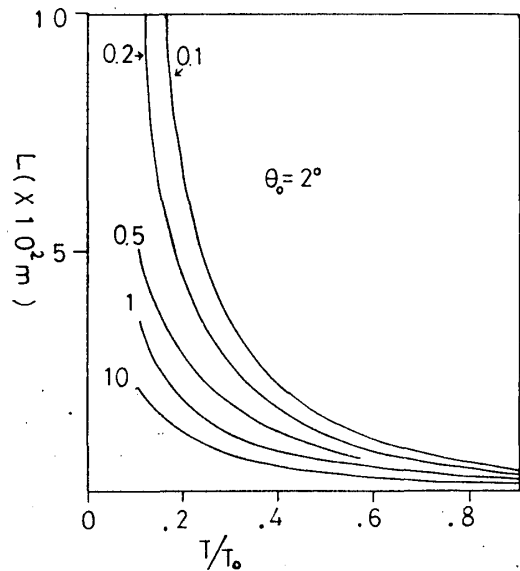
今、 $\overline{OS}$  を地表面、 $\overline{OT_0}$  を熱源 (温度 :  $T_0$ )、気温を  $0^\circ\text{C}$  とすると、冷却の式は、 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = hT_{x=0} \dots\dots(17)$  となる。(16) 式と (17) 式より、 $h \doteq \frac{1}{l} \dots\dots(18)$  故に、1m 深地温は、 $\overline{O'T}$  と  $\overline{O'S'}$  の

交点で近似的に求まる。従って、それは第3図を図式化することにより幾何学的に解くことができる。精度は図から分る様に、熱源の上面と地表面との交点、 $O$  から離れる程、高くなる。

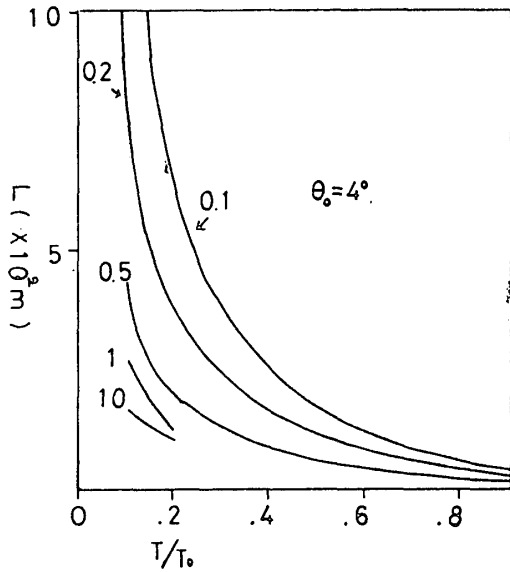
$\theta_0$  を  $10^\circ$  から  $1^\circ$  迄変へ、 $h$  を 0.1 から 10 迄変へた時の 1m 深地温と交点  $O$  からの距離との関係を幾何学的に求めた。結果を、第4図、第5図、第6図、第7図に示す。図に於て、 $L$  : 熱源の上面と地表面との交点、 $O$  からの距離 (m)  $T$  : 気温が  $0^\circ\text{C}$  の時の 1m 深地温グラフに示した数字は  $h$  の値である。



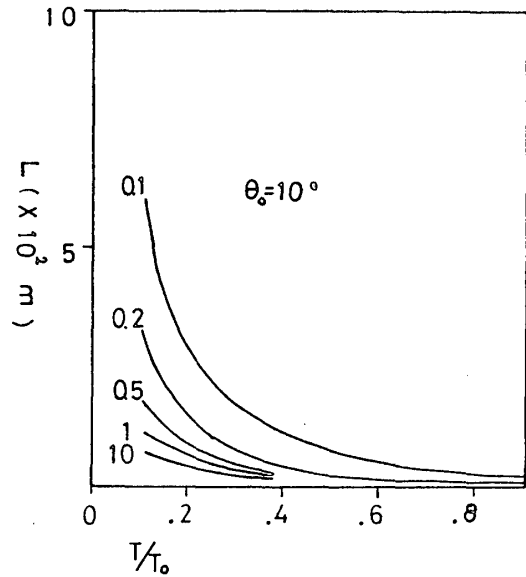
第4図



第5図



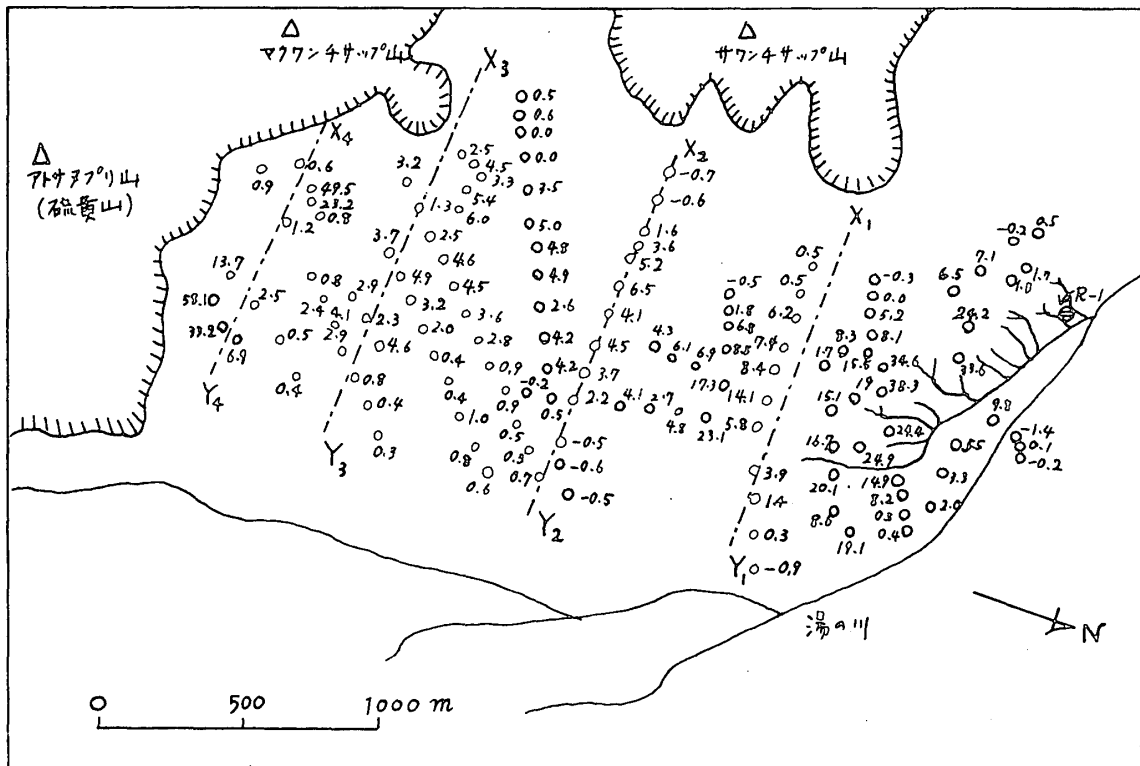
第 6 図



第 7 図

### 5. 川湯地域の地温解析

第 4, 5, 6, 7 図を用いて川湯地域の 1m 深地温の解析を行ない、地下熱源即ち温泉の上面の形態を論じた。データは、福富、須川、藤木各氏による論文、川湯温泉の地球物理学的研究(昭和 31 年)に於けるものを使用した。この論文中の第 12 図を地温のみをぬき出して書き直したものを、第 8 図に示す。この論文は次の様に述べている。「風そ 1~2 m の表土の下に凝灰岩質の地層があり、温泉はこの中から湧出する。天然温泉の湧出場所の多くは湯の川によって



第 8 図 川湯地域の 1m 深地温分布 (福富・須川・藤木:川湯温泉の地球物理学的研究, 第 12 図, 地球物理学研究報告, 第 4 号, 昭和 31 年, より転用)  
(白丸, 黒丸はそれぞれ昭和 27 年及び昭和 30 年の測点, 数字は, 測定値-normal 地温)

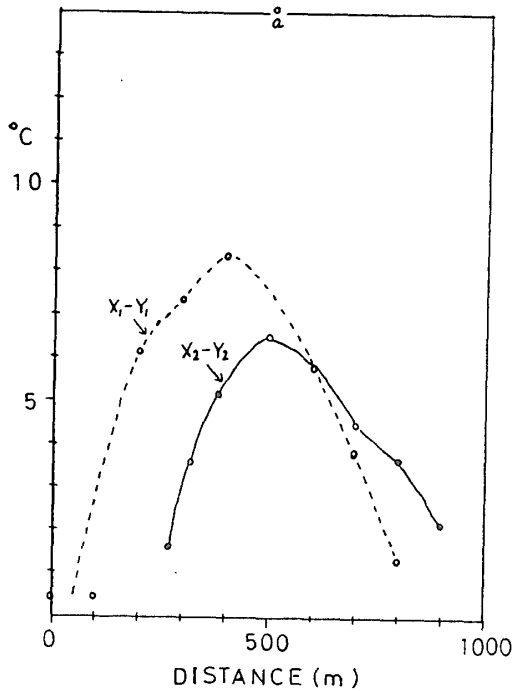
侵蝕された低地にあり、凝灰岩質地層の上には表土を欠き温泉洗滌物と思われる薄く硬い殻で覆われている場合がある。」「温泉地域では温泉の湧出する層をつきぬけて深く掘ると地下水が得られる。」又、温泉のボーリングのデータから同論文は次の様に述べている。「地温が  $40^{\circ}$  以上である区域は場所によって多少違いはあるが、地面下  $30\sim 40\text{ m}$  までの簿田にあり、それより深くなると急に地温は低下して  $10^{\circ}\text{C}$  位になってしまう。」「その湧出状況から見て、静止水頭（同論文を基にして筆者補足：温泉の）は  $2\sim 3$  の場合を除けば湧出口上せいぜい  $20\sim 30\text{ cm}$  位の高さであると推定される。故に湧出口の高さの水平分布は大略静止水頭高の水平分布と考えることができるであろう。」「その流向（同論文を基にして筆者補足：温泉の）をきめると  $S10^{\circ}\sim 15^{\circ}W$  から  $N10^{\circ}\sim 15^{\circ}E$  に大体向っていることが推定される。」

以上より、筆者は次の様な推定を行なった。

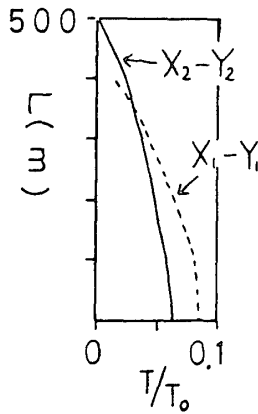
温泉のボーリングの存在個所が市街地であること、地図より、第 8 図に於ける  $X_1-Y_1$ ,  $X_2-Y_2$  線と市街地の高度差は  $20\text{ m}$  位であること、地表附近を除いて、 $X_1-Y_1$ ,  $X_2-Y_2$  線附近から市街地にかけて、同様な地質構造即ち、表土の下に凝灰岩の地層があり、その中から温泉が湧出し、地下水層はその下にあるという構造であることが推定されること、市街地に於ける温泉の静止水頭が  $20\sim 30\text{ cm}$  位にしか過ぎないこと、以上より、温泉は「自由地下水的」であり、従って温泉の上面は、高度と共に南方即ち硫黄山の方へ向って次第に高くなっていくであろうと思われる。福富等の論文に於ける温泉のボーリングの深度に関するデータによると（この論文の第 1 表）、熱源の深さ（温泉の上面の深度）は  $10\text{ m}$  以下であると思われる。従って、 $X_1-Y_1$  線及び  $X_2-Y_2$  線に於ける熱源の深さは  $30\text{ m}$  以下であると推定される。又同論文によると、ボーリング（温泉の）に関するデータから  $X_1-Y_1$ ,  $X_2-Y_2$  に於ける熱源の温度を  $100^{\circ}\text{C}$  に近いと想像される。湯原は別府で、凝灰岩質地層の冷却常数、 $h$  は  $0.15(m^{-1})$  と計算している。<sup>(7)</sup>

第 4, 5, 6, 7 図を用いて温泉の上面の形を推定するに当り、これ等の図を得たのと同様な考えにより、熱源の最浅部より上の地層の影響を冷却効果に含める。その厚さを  $L'(m)$  とすると、 $1/L'$  をみかけの冷却常数、 $h'$  とよび、 $h$  に加えて  $1/h''=1/h+1/h'$  …… (19) とする。 $L'>1$  であり又、前に述べた様に  $L'<30(m)$  と考えられるから、 $\frac{1}{h}<30$  と仮定して、（例えば、湯原は、 $h=0.15(m^{-1})$  を得ている。<sup>(7)</sup>  $1>h''>0.03$  とする。又、温泉の上面の傾斜を  $10$  度以下と仮定する。

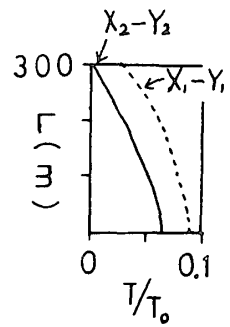
第 8 図は、測定された  $1\text{ m}$  深地温から、normal 地温を引いた値を示したものである。3. で論じた様に、それは温泉のみによる  $1\text{ m}$  深地温を示すと考えられる。 $X_1-Y_1$ ,  $X_2-Y_2$  線上のその値と距離間隔の関係を第 9 図に示す。その図に於て、 $a$  点は例外として除外した。第 9 図を書き直したものが第 10 図と第 11 図である。第 10 図は、最高温度を示す地点から川へ向って計った距離と温度（ $1\text{ m}$  深地温—normal 地温）の関係を、第 11 図は逆の方向への関係を表わす。両図と第 4, 5, 6, 7 図とを比較することにより、 $X_1-Y_1$  線について、 $\theta=10^{\circ}$ ,  $h''=0.2(m^{-1})$ ;  $X_2-Y_2$  線について、 $\theta=10^{\circ}$ ,  $h''=0.5(m^{-1})$  を得る。但し、それは両グラフの中間部分で成立し、グラフの両端では解析グラフにのらない。グラフの上端が  $0$  に近づく傾向のあることは、川の影響と解釈され、第 7 図から、 $\theta>10^{\circ}$  のグラフを推定することによりそこでは  $10^{\circ}$  より傾斜が急になる。下端についても同様の推定より  $\theta>10^{\circ}$  と解釈される。従って、熱温泉上面の形を極端に書けば第 12 図に示す形のものとして推定される。 $X_1-Y_1$  に於ける  $h''$  が  $X_2-Y_2$  に於けるものより小さな理由は、福富等の論文に於てあったように、表土の上に温泉沈滌物と思われる薄く硬い殻が存在する為であろうと思われる。<sup>(6)</sup>



第9図 1m 深地温—normal 地温と距離間隔との関係



第10図



第11図



第12図

$X_3-Y_3$ ,  $X_4-Y_4$  線は、それに垂直な方向の温度変化が大き過ぎるので、解析しなかった。尚、冷却常数、 $h$  は蒸発の影響を含むが、1m 深地温を論ずる場合、それに用いる  $h$  はかなりの期間の平均値であり、従って、常数と考へて差支へない。

## 6. 熱源の上面について

温泉の上面の上に一般に毛管帯が存在する。毛管水は、定常的な流動状態にある温泉に於て、蒸発による水の移動以外の上方への移動は、特殊な例（1時的豪雨等）を除いて存在しない。かつ、毛管帯の上面は温泉の上面よりもかなり低い温度であると推定され、故に蒸発量は少ないと考えられる。従って、一般に毛管帯の水分は上方へ動かないと考えられる。熱の毛管帯に於ける上方への移動は、伝導のみによって生ずることになり、そこでの  $K$  は、水飽和の層での値となる。故に毛管帯は地層に含め、熱源の上面は毛管帯の下端即ち温泉の上面とするのが妥当である。

## 7. 結 語

1. ニュートンのクーリングの式は地表から冷却原因として、伝導、輻射を考える限り十分の近似を与える式である。蒸発を考慮すると、冷却常数は温度の函数になるが、1m 以深の地温を論ずる場合、地温の日変化は一般に無視されるから、冷却常数はある一定期間の平均値とみなすことができ、ニュートンのクーリングの式は地表からの冷却の一般式として、一般に十分な近似で成立する。
2. 一般に熱源の深さが5m 以上であれば、熱源のみによる地温は測定地温から熱源の存在しない場所の地温、即ち、normal 地温を引けば、十分な近似で求まる。
3. 熱源の上面の最高部から上の地層の1m 深地温に対する影響をクーリング効果に含め、それにより定まる常数（冷却常数に対応する。）をみかけの常数とよんだ。この効果と通常の冷却効果を両方含んで定まる総合的な冷却常数  $h'$  の値は川湯地域の1m 深地温の Data

(福富等による) から,  $0.2 \sim 0.5(m^{-1})$  を得た。

### 引用文献

- (1) W. H. Giedt: 基礎伝熱工学, p. 16 (1957), 久我修, 横堀進共訳.
- (2) H. Grober, U. Grigull & S. Erk: 熱伝達の基礎, p. 436 (1961), 坪内為雄, 加藤清雄共訳.
- (3) 和田昭夫: 1次元RC回路網による地温の解析, 札幌大学教養部紀要第2号 (昭和46年).
- (4) 鈴木清太郎: 農業気象学, p. 171 (昭和36年).
- (5) 藤木忠美, 和田昭夫, 小林大二: 恵山火山北麓の温泉調査, 北大地球物理学研究報告, 第14号 (1965).
- (6) 福富孝治, 須川明, 藤木忠美: 川湯温泉の地球物理学的研究, 北大地球物理学研究報告, 第4号 (昭和31年).
- (7) 湯原浩三: 地下1mの地温分布から地下の熱源を理論的に推定する一方法, 物理採鉱, 8, No. 1.