波動方程式を満たす電磁ポテンシャルの創成法（II）

村田 茂昭

以前に同名の論文を発表した[1) 2)]。当時、私は、「われわれの時空は正常 *Riemann* 空間である」という仮説にとらわれていたが、その後、若干の検討の後、この仮説を放棄した[3)]。したがって、文献(1)、(2) は再検討を要する。本論文は、重力場が無視できる場合「われわれの時空は、異常 *Riemann* 空間である」という一般的に認められている立場にしたがって、論文（2）を書き直したものである。その際、必要な部分を論文（4）を書き直す形で、書き加えている。

われわれの時空は、重力場を無視できる場合、*Minkowski* 時空かまたはそれで有効に近似できる時空である[4)]。本論文では、*Minkowski* 時空における波動方程式に関して論じている。なお、この場合、*Minkowski* 時空とは、*Minkowski* 座標系から一般座標変換で到達できるすべての座標系を意味する。したがって、3 次元空間座標の部分は、球座標系や円筒座標系の場合等を含んでいる。

これらの研究の流れにおいて、基本テンソルの符号系を（−, +, +, +）から（+, −, −, −）に変更している。本論文においても、この L. D. *Landau* 流の表記法を採用している。ただし、*Landau* はガウス単位系を採用しているから、電磁場関係の式を比較するときは、読者は充分に注意してほしい。(ガウス単位系においては、たとえば、予想外のところに 4π の因子が現れる。) 本論文は、国際単位系（SI）を採用している。

なお、理論物理学の著者達とできるだけ表現をあわせるため、単位虚数には i を使用し、電流密度には j を使用した。

本論文においては、テンソルの表記法に関して、*Einstein* の表記法を彼の原案通り採用している。すなわち、テンソル計算の表記において、上下に同じギリシャ文字が現れた場合、それらを0, 1, 2, 3と変化させて和をとることを意味する（縮約)。これに対し、上下にある

文字がラテン体の場合は、それらの指標が同一のある値をとるひとつの成分を表す。

2．4次元異常 *Riemann* 空間における *Maxwell* の方程式

簡単のため、さしあたり、空間座標はデカルト座標系であるとする。すなわち、*Minkowski* 座標系の場合を論ずる。

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

電磁場の 4 次元ベクトルポテンシャルを

$$A_\mu = \left(\frac{\phi}{c},\ -\mathrm{A}_x,\ -\mathrm{A}_y,\ -\mathrm{A}_z\right) \tag{2.2}$$

とおく。ただし

$$\left.\begin{array}{l} \phi\ \text{: scalar potentiol in 3-dimensional space} \\ c\ \text{: light velocity} \\ \mathbf{A} = (\mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z)\ \text{: vector potential in 3-dimentional space} \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

である。

電磁場の共変テンソルは

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_x/c & \mathrm{E}_y/c & \mathrm{E}_z/c \\ -\mathrm{E}_x/c & 0 & -\mathrm{B}_z & \mathrm{B}_y \\ -\mathrm{E}_y/c & \mathrm{B}_z & 0 & -\mathrm{B}_x \\ -\mathrm{E}_z/c & -\mathrm{B}_y & \mathrm{B}_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

μ : row ν : column

電磁場の反変テンソルは

$$
F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.5)
$$

μ : row　ν : column

である。

ここで

$$
\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_x, E_y, E_z) \quad \text{: electric field vector in 3-dimensional space} \\ \mathbf{B} &= (B_x, B_y, B_z) \quad \text{: magnetic flux vector in 3-dimensional space} \end{aligned}\right\} \quad (2.6)
$$

である。なお、一般の直交曲線座標系の場合、電磁場テンソルの時間－空間、空間－時間成分と 3 次元理論の極性ベクトル成分との対応は簡単であるが、空間－空間成分と 3 次元理論の軸性ベクトル成分との対応は簡単ではない。これについては、*Hertz* テンソルの項で述べる。

(2.4)、(2.5) 式は、3 次元の電磁場の理論の場とポテンシャルの関係式

$$
\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (a) \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \qquad (b) \end{aligned}\right\} \quad (2.7)
$$

と等価である。

これらの電磁場のテンソルより、4 次元の *Maxwell* の方程式は

$$
D_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu \qquad (2.8)
$$

となる。

ただし、D_μ は x^μ 軸に関する共変微分を表す。

また

$$j^{\mu} = (c\rho, \mathrm{j}_x, \mathrm{j}_y, \mathrm{j}_z) \qquad (2.9)$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho \ :\ \text{electic charge density in 3-dimentional space} \\ \mathbf{j} = (\mathrm{j}_x, \mathrm{j}_y, \mathrm{j}_z) \ \ :\ \text{electic current density in 3-dimentional space} \end{array}\right\} \quad (2.10)$$

である。

ここで

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbb{E} & (a) \\ \mathbb{H} \equiv \dfrac{1}{\mu_0}\mathbf{B} & (b) \end{array}\right\} \qquad (2.11)$$

とおく。

ただし、国際単位系（SI）においては、

$$\begin{array}{l} \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \\ \varepsilon_0 = \dfrac{10^7}{4\pi c^2} \end{array} \qquad (2.12)$$

である。

これらの式により、(2.8）式は、*Maxwell* の方程式の一組

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho & (\mathbf{a}) \\ \nabla \times \mathbf{H} - \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{j} & (\mathbf{b}) \end{array}\right\} \qquad (2.13)$$

に対応する。

3次元の *Maxwell* の方程式のもうひとつの組

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (\mathbf{a}) \\ \nabla \times \mathbf{E} + \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0} & (\mathbf{b}) \end{array}\right\} \qquad (2.14)$$

に対応する 4 次元の式は

$$\frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}=0 \qquad (2.15)$$

と考えられる。なお、この式は、電磁場のテンソルが、(2.4) 式の形をしている場合、数学的恒等式である。

以下の章においては、空間に電荷・電流のない場合。すなわち、

$$j^{\mu}=0 \qquad (2.16)$$

の場合について論ずる。

3. *Hertz* ベクトルと *Hertz* テンソル

3.1 *Minkowski* 座標系の場合

3 次元の電気型 *Hertz* ベクトル $\mathbf{\Pi}_e$ と磁気型 *Hertz* ベクトル $\mathbf{\Pi}_m$ を下記のごとくに定義する。

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_e &= (\Pi_{e,x}, \Pi_{e,y}, \Pi_{e,z}) \quad (a)\\ \mathbf{\Pi}_m &= (\Pi_{m,x}, \Pi_{m,y}, \Pi_{m,z}) \quad (b)\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

磁電ポテンシャルが存在しない立場で *Hertz* ベクトルと電磁ポテンシャルの関係式は、

$$\left.\begin{aligned}\phi &= -\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_e \quad (a)\\ \mathbf{A} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}+\mu_0\nabla\times\mathbf{\Pi}_m \quad (b)\end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

となる。

Minkowski 座標系で、下記のような *Hertz* テンソルを定義すると

$$\Pi^{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\Pi_{e,x}}{c} & -\dfrac{\Pi_{e,y}}{c} & -\dfrac{\Pi_{e,z}}{c} \\ \dfrac{\Pi_{e,x}}{c} & 0 & \mu_0\Pi_{m,z} & -\mu_0\Pi_{m,y} \\ \dfrac{\Pi_{e,y}}{c} & -\mu_0\Pi_{m,z} & 0 & \mu_0\Pi_{m,x} \\ \dfrac{\Pi_{e,z}}{c} & \mu_0\Pi_{m,y} & -\mu_0\Pi_{m,x} & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

μ : row　ν : column

$$D_\nu \Pi^{\mu\nu} = A^\mu \qquad (3.4)$$

である。

ただし

$$A^\mu = g^{\mu\alpha} A_\alpha \qquad (3.5)$$

Minkowski 座標系では、電磁ポテンシャルの反変成分は

$$A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z) \qquad (3.6)$$

である。

$$\Pi^{\nu\mu} = -\Pi^{\mu\nu} \qquad (3.7)$$

であるので *Riemann* 幾何学の定理により

$$D_\mu D_\nu \Pi^{\mu\nu} = 0 \qquad (3.8)$$

$$\therefore D_\mu A^\mu = 0 \qquad (3.9)$$

これに対応する 3 次元理論の式は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \qquad (3.10)$$

である。すなわち、*Lorentz* 条件は自動的に満たされる。

Hertz テンソルと電磁場の直接の関係式は、(2.7) 式より

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \nabla\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_e - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial\,\nabla\times\mathbf{\Pi}_m}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\nabla\times\mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \mu_0\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Pi}_m \end{aligned} \tag{3.11}$$

である。

3.2 一般の *Minkowski* 時空の場合

空間座標が直交曲線座標の場合、基本テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -h_1^2 & & \\ & & -h_2^2 & \\ 0 & & & -h_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1/h_1^2 & & \\ & & -1/h_2^2 & \\ 0 & & & -1/h_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

である。ただし、ここで h_k は、測度係数である。

Hertz テンソルは、下記のように表記するのが適切であろう。

$$\Pi^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\Pi_e^1/c & -\Pi_e^2/c & -\Pi_e^3/c \\ \Pi_e^1/c & 0 & \mu_0\Pi_m^3 & -\mu_0\Pi_m^2 \\ \Pi_e^2/c & -\mu_0\Pi_m^3 & 0 & \mu_0\Pi_m^1 \\ \Pi_e^3/c & \mu_0\Pi_m^2 & -\mu_0\Pi_m^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

μ : row ν : column

電磁ポテンシャルは

$$A^{\mu} = D_{\nu}\Pi^{\mu\nu} = (A^0, A^1, A^2, A^3) \qquad (3.15)$$

3次元の量との関係は

$$\left.\begin{aligned} \phi &= cA^0 && (a) \\ \mathbf{A} &= (\mathrm{h}_1 A^1, \mathrm{h}_2 A^2, \mathrm{h}_3 A^3) && (b) \end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

である。

4次元反対称テンソルの時間－空間成分（空間－時間成分）と3次元理論の極性ベクトル成分との式は、(3.16*b*) 式と同形である。すなわち、電気的 *Hertz* ベクトルを

$$\mathbf{\Pi}_e = (\Pi_{e,1}, \Pi_{e,2}, \Pi_{e,3}) \qquad (3.17)$$

とすると

$$\Pi_{e,k} = \left[\mathrm{h}_k \Pi_e^k\right] \qquad (3.18)$$

である。ただし、指標kについては、(ギリシャ文字ではないので) 和をとらない…*Einstein* の省略記法ではない…ことを示すため、カギ括弧をつけた。

4次元反対称テンソルの空間－空間成分と3次元理論の軸性ベクトルの成分との関係式は、やや複雑である。すなわち、磁気 *Hertz* ベクトルを

$$\mathbf{\Pi}_m = (\Pi_{m,1}, \Pi_{m,2}, \Pi_{m,3}) \qquad (3.19)$$

とすると、テンソルの成分との関係式は

$$\Pi_{m,k} = \left[\frac{\sqrt{-g}}{\mathrm{h}_k}\Pi_m^k\right] \qquad (3.20)$$

ここでgは、基本テンソルから作られる行列の行列式の値である。

4. *Helmholtz* の方程式

波源のないところで *Maxwell* の方程式と等価な *Helmholtz* の方程式を論ずるために、次のような3次元スカラ方程式を考える。

$$\nabla^2 \mathrm{f} + k^2 \mathrm{f} = 0 \qquad (4.1)$$

ただし

$$\frac{\partial}{\partial t} = \omega \qquad (4.2)$$

とおき

$$k \equiv \frac{\omega}{c} \qquad (4.1)$$

とした。ここで、f を3次元の *Hertz* のスカラと呼ぶこととする。

Hertz ベクトルに関する *Helmholtz* の方程式は、波源のないところで

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi} + k^2 \mathbf{\Pi} = 0 \qquad (4.5)$$

である。ここで、$\mathbf{\Pi}$ は $\mathbf{\Pi}_e$ または $\mathbf{\Pi}_m$ を意味する。

(4.4) 式の解として、下記のごときものが知られている。ただし $\mathbf{a}$ を定ベクトル、$\mathbf{r}$ を径ベクトルとする。また、f を、3次元の *Hertz* のスカラとする。

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathbf{K}_\mathrm{a} = \mathbf{a}\,\mathrm{f} & (a) \\
\mathbf{L} = \nabla \mathrm{f} & (b) \\
\mathbf{M}_\mathrm{a} = \nabla \times \mathbf{a}\,\mathrm{f} & (c) \\
\mathbf{M}_\mathrm{r} = \nabla \times \mathbf{r}\,\mathrm{f} & (d) \\
\mathbf{N}_\mathrm{a} = \dfrac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_\mathrm{a} & (e) \\
\mathbf{N}_\mathrm{r} = \dfrac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_\mathrm{r} & (f)
\end{array}\right\} \qquad (4.6)$$

これらの解のうちで$\mathbf{L}$は電磁場を作らないので（重力場を含む一般論では重要であろうが）さしあたり、検討の対象としない。

本論文は、*Einstein* の特殊相対論に添って書かれており、前節の二つの *Hertz* ベクトルは理論的に対称ではない。したがって、上述の *Hertz* ベクトルに関する *Helmholtz* の式は参考にはするが、後述のポテンシャルに関する *Helmholtz* の式を優先させる。

3 次元の *Maxwell* の式と等価な、電磁ポテンシャルに関する *Helmholtz* の式は、波源のないところで

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla^2\phi+k^2\phi=0 & (a)\\ \nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=0 & (b)\end{array}\right\} \qquad (4.6)$$

である。

後述の例外を除き、*Hertz* ベクトルの解（4.5）式を、(3.2）式に代入すると特殊相対論に基づいた電磁ポテンシャルが得られる。しかし、次章においては、最初から 4 次元時空において電磁ポテンシャルを解析する。

5．定テンソルと 4 次元スカラの直積の形の *Hertz* テンソルより得られる電磁ポテンシャル

（4.6）式に対応する 4 次元の *Helmholtz* の式は

$$g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu A^k=0 \qquad (5.1)$$

と考えられる。前節を参考にして、上式を満たし、かつ *Lorentz* 条件を満たす 4 次元電磁ポテンシャルの源となる *Hertz* テンソルとして次のような形を考える。

$$\Pi^{\mu\nu}\equiv a^{\mu\nu}f \qquad (5.2)$$

ここで

$$a^{\nu\mu} = -a^{\mu\nu} \qquad (5.3)$$

である。このテンソルと4次元スカラから、比較的簡単な操作で電磁ポテンシャルが創成されるので a^{jk} を創成テンソルと名づける。

最も簡単な場合は、創成テンソルが定テンソルである場合である。

$$D_{\mu} a^{jk} = 0 \qquad (5.4)$$

また、4次元スカラ f は、4次元空間における *Hertz* のスカラであり、次の波動方程式を満たすものとする。

$$g^{\mu\nu} D_{\mu} D_{\nu} f = 0 \qquad (5.5)$$

$$A^{k} = D_{\alpha} \Pi^{k\alpha} = D_{\alpha}(a^{k\alpha} f) \qquad (5.6)$$

(5.6) 式を (5.1) 式に代入する。*Minkowski* 時空においては、(重力場の影響を考慮しなくともよい場合であるので) 共変微分は順序の変換が可能である。

ゆえに

$$\begin{aligned} \therefore\, & g^{\mu\nu} D_{\mu} D_{\nu} D_{\alpha}(a^{k\alpha} f) \\ & = a^{k\alpha} D_{\alpha} g^{\mu\nu} D_{\mu} D_{\nu} f = 0 \end{aligned} \qquad (5.7)$$

である。ただし、ここで (5.5) 式を利用した。

したがって、$a^{k\alpha}$ が定テンソルであれば、(5.6) 式は、*Lorentz* 条件を満たしかつ波動方程式を満足する電磁ポテンシャルをあらわす。定テンソルとは、*Minkowski* 座標系において、成分が定数のテンソルである。前章の (4.5) 式は、*Hertz* ベクトルに関する *Helmholtz* の方程式の解として得られたものであることに留意して議論を進める。*Minkowski* 座標系における *Hertz* テンソルの形より、この形の解の

中には、電気型の *Hertz* ベクトルとしての $\mathbf{K}_a$、磁気型の *Hertz* ベクトルとしての $\mathbf{K}_a$ が含まれる。

6．いわゆる径 *Hertz* ベクトルの 4 次元的解釈

前章においては、創成テンソルの

$$D_\mu a^{k\alpha} = 0 \qquad (6.1)$$

という性質を利用した。このためには、創成テンソルが定テンソルであれば充分である。しかし、これは必要条件ではない。実際の計算は、(5.7) 式の左辺を計算してゼロになればよい。

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu D_\alpha (a^{k\alpha} f) \\ &= g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \left\{ (D_\alpha a^{k\alpha}) f + a^{k\alpha} (D_\alpha f) \right\} \\ &= g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \left\{ (D_\alpha a^{k\alpha}) f \right\} + g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \left\{ a^{k\alpha} (D_\alpha f) \right\} \\ &\equiv \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \end{aligned} \qquad (6.2)$$

ここで、計算を *Minkowski* 座標系で行うこととする。この場合共変微分演算子は偏微分演算子と等価である。また創成テンソルの成分としては、座標の一次関数に限るものとする。

創成テンソルの成分は 2 回偏微分されるとゼロになるから

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \left\{ (D_\alpha a^{k\alpha}) f \right\} \\ &= g^{\mu\nu} D_\mu \left\{ (D_\nu D_\alpha a^{k\alpha}) f \right\} + g^{\mu\nu} D_\mu (D_\alpha a^{k\alpha} D_\nu f) \\ &= g^{\mu\nu} D_\mu (D_\alpha a^{k\alpha} D_\nu f) \end{aligned} \qquad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{I}_1 &= g^{\mu\nu} (D_\mu D_\alpha a^{k\alpha}) D_\nu f + g^{\mu\nu} D_\alpha a^{k\alpha} D_\mu D_\nu f \\ &= D_\alpha a^{k\alpha} g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (6.4)$$

なお、ここで (5.5) 式を利用した。

$$\begin{aligned}\therefore \mathbf{I}_2 &= g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \left\{ a^{k\alpha}(D_\alpha f) \right\} \\ &= g^{\mu\nu} D_\mu \left\{ (D_\nu a^{k\alpha})(D_\alpha f) \right\} + g^{\mu\nu} D_\mu \left\{ a^{k\alpha}(D_\nu D_\alpha f) \right\} \\ &\equiv \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4 \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathbf{I}_3 &= g^{\mu\nu} D_\mu \left\{ (D_\nu a^{k\alpha})(D_\alpha f) \right\} \\ &= g^{\mu\nu} \left\{ (D_\mu D_\nu a^{k\alpha})(D_\alpha f) \right\} + g^{\mu\nu} \left\{ (D_\nu a^{k\alpha})(D_\mu D_\alpha f) \right\} \\ &= g^{\mu\nu} \left\{ (D_\nu a^{k\alpha})(D_\mu D_\alpha f) \right\} \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathbf{I}_4 &= g^{\mu\nu} D_\mu \left\{ a^{k\alpha}(D_\nu D_\alpha f) \right\} \\ &= g^{\mu\nu} \left\{ (D_\mu a^{k\alpha})(D_\nu D_\alpha f) \right\} + g^{\mu\nu} \left\{ a^{k\alpha}(D_\mu D_\nu D_\alpha f) \right\} \\ &= g^{\mu\nu} \left\{ (D_\mu a^{k\alpha})(D_\nu D_\alpha f) \right\} + a^{k\alpha} D_\alpha g^{\mu\nu}(D_\mu D_\nu f) \\ &= g^{\mu\nu} \left\{ (D_\mu a^{k\alpha})(D_\nu D_\alpha f) \right\} \end{aligned} \tag{6.7}$$

なお、ここでも（5.5）式を利用した。

$$\begin{aligned}\therefore \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4 \\ &= g^{\mu\nu} \left\{ (D_\nu a^{k\alpha})(D_\mu D_\alpha f) \right\} + g^{\mu\nu} \left\{ (D_\mu a^{k\alpha})(D_\nu D_\alpha f) \right\} \end{aligned} \tag{6.8}$$

ここで、$\mathbf{I}_2$のすべての項を偏微分形式で書き出して、その構造を検討すると、創成テンソルの成分が特定の値をとるときに、$\mathbf{I}_2$はゼロになることがわかる。これらの解には複数の形があるが、簡単な１例は、(x^0, x, y, z) 系において、

$$\left.\begin{array}{ll} a^{23} = -a^{32} = x & (a) \\ a^{31} = -a^{13} = y & (b) \\ a^{12} = -a^{21} = z & (c) \\ \textit{other cases} \quad a^{\mu\nu} = 0 & (d) \end{array}\right\} \tag{6.9}$$

のときである。すなわち、このとき

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu D_\alpha (a^{k\alpha} f) = 0 \tag{6.10}$$

である。

このとき、創成テンソルは

$$a^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&z&-y\\0&-z&0&x\\0&y&-x&0\end{bmatrix} \tag{6.11}$$

である。

ここで、座標系の空間部分を球座標系に変換する。

$$(x^{\mu})=(x^0, x, y, z) \tag{6.12}$$

のとき、

$$\left.\begin{aligned}x'^0&=x^0\\x'^1&=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\x'^2&=\theta=\cos^{-1}\left(z/r\right)\\x'^3&=\varphi=\tan^{-1}\left(y/x\right)\end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

とおけば

$$a'^{\mu\nu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}a^{\alpha\beta} \tag{6.14}$$

$$\therefore a'^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1/r\sin\theta\\0&0&-1/r\sin\theta&0\end{bmatrix} \tag{6.15}$$

μ : row　ν : column

反対称テンソルの空間－空間成分は、3次元の理論では、いわゆる軸性ベクトルに対応する。この成分間の対応関係については（3.20）式で述べた。

創成テンソルが（6.15）式の場合は、球座標系において *Hertz* ベクトルが

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Pi}'_e &= (0,0,0) \quad (a) \\ \mathbf{\Pi}'_m &= (\mathbf{rf},0,0) \quad (b) \end{aligned}\right\} \qquad (6.16)$$

の場合に相当する。これは、(4.5）式の中には無いが

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{rf} \qquad (6.17)$$

と書くべき解である。これは、*Hertz* ベクトルに関する *Helmholtz* の方程式（(4.4）式）の解ではないが、このタイプの磁気型 *Hertz* ベクトルから（3.2）式によって得られるベクトルポテンシャルが、ベクトルポテンシャルに関する *Helmholtz* の方程式（(4.6b）式）の解なのである。これが、第 4 章で言及した例外にあたる。

上述の解法から分かるように

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Pi}'_e &= (\mathbf{rf},0,0) \quad (a) \\ \mathbf{\Pi}'_m &= (0,0,0) \quad (b) \end{aligned}\right\} \qquad (6.18)$$

の形の解はない。(これらから作られる電磁ポテンシャルは、ベクトル波動方程式の解とはならない。)

なお、(6.8）式をゼロにするような $a^{\mu\nu}$ は、ほかにも存在する。たとえば、*Minkowski* 座標系において

$$\left.\begin{aligned} &a^{01} = -a^{10} = y && (a) \\ &a^{02} = -a^{20} = -x && (b) \\ &a^{12} = -a^{21} = x^0 && (c) \\ &\textit{other cases}\ \ a^{\mu\nu} = 0 && (d) \end{aligned}\right\} \qquad (6.19)$$

の形の創成テンソルも、ベクトル波動方程式と *Lorentz* 条件を満足する電磁ポテンシャルを創成する。しかしこの形の解は、x^0 をあらわに含むので、物理的にあまり意味はないと考えられる。

7. 定ベクトルの rotation から作られる *Hertz* ベクトル

(4.5) 式の $\mathbf{M}_a$、$\mathbf{N}_a$ は、4 次元的にはどのように解釈されるか論じよう。

Minkowski 座標系において以下のような定ベクトルを考える。

$$\begin{aligned} &\mathrm{a}_\mu = (\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3) \\ &\quad \textit{where } \mathrm{a}_k (k = 0,1,2,3) = const. \end{aligned} \tag{7.1}$$

4 次元の *Hertz* のスカラ f と a_μ の直積を考える。

$$p_\mu = \mathrm{a}_\mu f \tag{7.2}$$

Hertz テンソルの共変成分を

$$\Pi_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu p_\nu - \partial_\nu p_\mu \tag{7.3}$$

とおく。これは、電磁場のテンソルと同型である。ただし

$$p^\mu = g^{\mu\alpha} p_\alpha \tag{7.4}$$

が *Lorentz* 条件を満たすかどうかは、ここでは問題にしない。

$$A^\mu = D_\nu \Pi^{\mu\nu} \tag{7.5}$$

によって得られる電磁ポテンシャルは、(7.3) 式の *Hertz* テンソルが反対称テンソルであるから *Lorentz* 条件を満たす。

また、*Minkowski* 座標系では、いつでも

$$D_\mu \to \partial_\mu \tag{7.6}$$

と書き換えることが可能であるので、この電磁ポテンシャルがベクトル波動方程式を満たすことも明らかである。しかし、これを (4.5) 式の $\mathbf{M}_a$ に相当させるためには、若干の細工が必要である。このことを進めるためには、電磁ポテンシャルを計算する系として、特定の系

を基準とする必要がある。便宜上これを基準系と呼ぶ。基準系において、次のような特定の形の定数混合テンソルを定義する。

$$b_\mu^\nu \equiv \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (7.7)$$

このテンソルは、基準系においてテンソルの空間－空間成分のみを抜き出す演算子の働きをする。

あらためて

$$\Pi'_{\mu\nu} \equiv b_\mu^\alpha b_\nu^\beta \left(\partial_\alpha p_\beta - \partial_\beta p_\alpha\right) \qquad (7.8)$$

$$\Pi'^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Pi'_{\alpha\beta} \qquad (7.9)$$

$$A'^\mu = D_\nu \Pi'^{\mu\nu} \qquad (7.10)$$

とすると、この A'^μ が $\mathbf{M_a}$ から作られる電磁ポテンシャルに対応する。

この操作は、もう一度実行できる。

(7.8) 式において、

$$p_\mu \to A'_\mu \qquad (7.11)$$

とする。ただし

$$A'_\mu = g_{\mu\alpha} A'^\alpha \qquad (7.12)$$

である。ここで

$$\Pi''_{\mu\nu} \equiv b_\mu^\alpha b_\nu^\beta \left(\partial_\alpha A'_\beta - \partial_\beta A'_\alpha\right) \qquad (7.13)$$

とすれば

$$\Pi''^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Pi''_{\alpha\beta} \tag{7.14}$$

$$A''^{\mu} = D_{\nu} \Pi''^{\mu\nu} \tag{7.15}$$

となる。A''^{μ} が（定係数を付加すれば）$\mathbf{N}_a$ より得られる電磁ポテンシャルに相当する。

なお、(7.8) 式、(7.13) 式の操作は、3次元理論で rotation を取る操作と等価である。

したがって3次元理論ですでに証明されているように、

$$A'_{\mu} \to A''_{\mu} \tag{7.16}$$

と置き換えて、さらに計算を進めると、出発点（この場合 A'^{μ} に相当する）に戻ってしまうので、このタイプの電磁ポテンシャルは以上述べたものに尽きる。

なお、*Hertz* テンソルの空間－空間成分から、電磁ポテンシャルを作っているので、これは、磁気型 *Hertz* ベクトルのみの議論である。電気型 *Hertz* ベクトルを論ずるためには反対称テンソルの空間－空間成分と時間－空間、空間－時間成分を入れ替える操作が必要である。これは、4次元の *Levi-Civita* の記号を用いると可能であるが、詳細は別の機会に論ずる。

8．別の形の径 *Hertz* ベクトル

第7章を参考にすると、別の形の径 *Hertz* ベクトルが存在することが分かる。

前章に述べた基準系において、次のようなベクトルを考える。

$$r^{\mu} = (0, x, y, z) \tag{8.1}$$

このベクトルと *Hertz* の4次元スカラ f の直積よりベクトル q^{μ} を作る。

$$q^{\mu} = r^{\mu} f \qquad (8.2)$$

$$q_{\mu} = g_{\mu\alpha} q^{\alpha} \qquad (8.3)$$

より、前節と同様の計算を進める。

$$\Pi'_{\mu\nu} \equiv b^{\alpha}_{\mu} b^{\beta}_{\nu} \left(\partial_{\alpha} q_{\beta} - \partial_{\beta} q_{\alpha} \right) \qquad (8.4)$$

$$\Pi'^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Pi'_{\alpha\beta} \qquad (8.5)$$

$$A'^{\mu} = D_{\nu} \Pi'^{\mu\nu} \qquad (8.6)$$

とすると、*Lorentz* 条件（(3.9) 式)、ベクトル波動方程式（(5.1) 式）を満たす電磁ポテンシャルが得られる。これが、(4.5) 式の $\mathbf{M}_r$ から作られる電磁ポテンシャルに相当する。

前章と同様にして、以上の操作をもう一度くりかえす。
すなわち

$$\Pi''_{\mu\nu} \equiv b^{\alpha}_{\mu} b^{\beta}_{\nu} \left(\partial_{\alpha} A'_{\beta} - \partial_{\beta} A'_{\alpha} \right) \qquad (8.7)$$

$$A''^{\mu} \doteq D_{\nu} \Pi''^{\mu\nu} \qquad (8.8)$$

と置くことによって、(4.5) 式の $\mathbf{N}_r$ から作られる電磁ポテンシャルに相当するものが得られる。

これらの電磁ポテンシャルも第 7 章に述べたとおり、磁気型 *Hertz* ベクトルから作られる電磁ポテンシャルである。

9．終章

以上で、以前に「我々の時空が正常 *Riemann* 空間である」という誤った認識の上に書かれた、3次元の *Hertz* テンソル理論と4次元の *Hertz* テンソル理論（4次元電磁ポテンシャル理論）を、4次元異常 *Riemann* 空間向けに書き直すことが出来た。ただし、一部の *Hertz* ベクトル（電気型 *Hertz* ベクトル）に対応する *Hertz* テンソルについては、(以前の論文でも言及していなかったのであるが)、今後の検討課題となっている。

この検討には、4次元異常 *Riemann* 空間における *Levi-Civita* の記号に関する詳細な検討が必要である。

もうひとつの問題は、「式はともかく、実際はどうなのだ」ということがある。これについても、今後の検討課題としたい。

［完］

［参考文献］

1）村田茂昭「三次元 *Hertz* ベクトルと四次元 *Hertz* テンソル理論について」『札幌大学女子短期大学部紀要』第27号　1996年３月　p1～p17
2）村田茂昭「波動方程式を満たす電磁ポテンシャルの創成法」『札幌大学女子短期大学部紀要』第28号　1996年９月　p57～p66
3）村田茂昭「*Lorentz* 変換の新解釈」『札幌大学女子短期大学部紀要』第30号　1997年９月　p23～p34
4）村田茂昭「擬 *Minkowski* 時空について」『札幌大学女子短期大学部紀要』第41号　2003年３月　p69～p99
5）ランダウ、リフシッツ著　恒藤敏彦、広重　徹訳『場の古典論』東京図書出版　1994