

# FFTによるデジタルフィルタのシミュレーション

—Excel 2002内蔵の FFT / IFFT ツール—

村田 茂昭

## 1. はじめに

以前に、フーリエ解析における係数の近似計算法と標本化定理との関連を論じた<sup>1)</sup>。さらに、離散的フーリエ解析 (DFT) と高速フーリエ変換 (FFT) の関係についても検討した<sup>2)</sup>。

一般に、DFT / FFT 関係の解説書<sup>3)4)</sup>は、数学的厳密性と数値計算のアルゴリズムの解説に力点をおいて、「実際にはどうなのか」がわかりにくい。「制御信号を DA コンバータで取り入れ、フィルターをかけ AD コンバータで元に戻す」ような技術は、すでに確立していると思いがちであるが、しばしば標本化定理に絡むトラブルに遭遇する。わたしは、この種の問題でハードウェアの実験をしたことはないが、ソフトウェアによるシミュレーションでしばらく混乱したことがある。本論文は、そのような混乱の原因を解析しトラブルを避けることを目指したものである。また、AD 変換 / DA 変換に格別興味のない読者も、一般的な表計算ソフトウェアの分析ツール中のフーリエ解析ツール (FFT / IFFT ツール) についてきちんとした基礎知識を得ることは有益であろう。

このたびは、さらに理論的整理を進め、FFT (高速フーリエ変換)、IFFT (高速逆フーリエ変換) で実際の数値計算を行う際のフィルターのかけ方について検討し、実際に数値計算を試行して若干の結果を得たのでここに報告する。

## 2. 数値計算上の幻影と実像

本章においては、簡単な例に基づき、フーリエ級数の近似計算とFFTのニュアンスの違いを論ずる。

### 2.1 簡単な信号波のFFT

「標本化定理」については、よく知られている。系に存在する（あるいは、目標とする）最高信号周波数を $v_M$ とすれば、ADコンバータのサンプリング周波数 $v_s$ を $v_s > 2v_M$ にとらなければならないことを理解することは、さほど難しくない。フィルターにかける信号を $f(t)$ としよう。ここで

入力データ → FFT → フィルタリング  
→ 逆FFT → 出力データ

に問題を限ると、周波数の絶対値は必要ないのでサンプリング周期を1に正規化しよう。（これは、真の周波数を計算する必要がない場合は、時間的に等間隔のデータさえ手に入ると、フィルタリングが可能であることを意味する。すなわち、この場合、Excelの分析ツールのひとつであるFFT / IFFTツールの使用法さえわかると充分である。）

データ数を $N$ とする。（FFTにおいては、 $N$ は制限がある。これは高速数値計算のアルゴリズム<sup>4)</sup>と関係するが、本論文の趣旨には無関係である。実際の数値計算に使用したプログラムはExcel 2002の分析ツールであり、基数2のFFTを使用している。すなわち、データ数は $2^n$ ： $n$ は整数でなければならない。）

下記において $N=64$ （すなわち、周期 $T=64$ ）として、入力信号波を

$$f(t) = 1 + \cos(2\omega_0 t) - 0.2 \cos(6\omega_0 t) \quad (2.1)$$

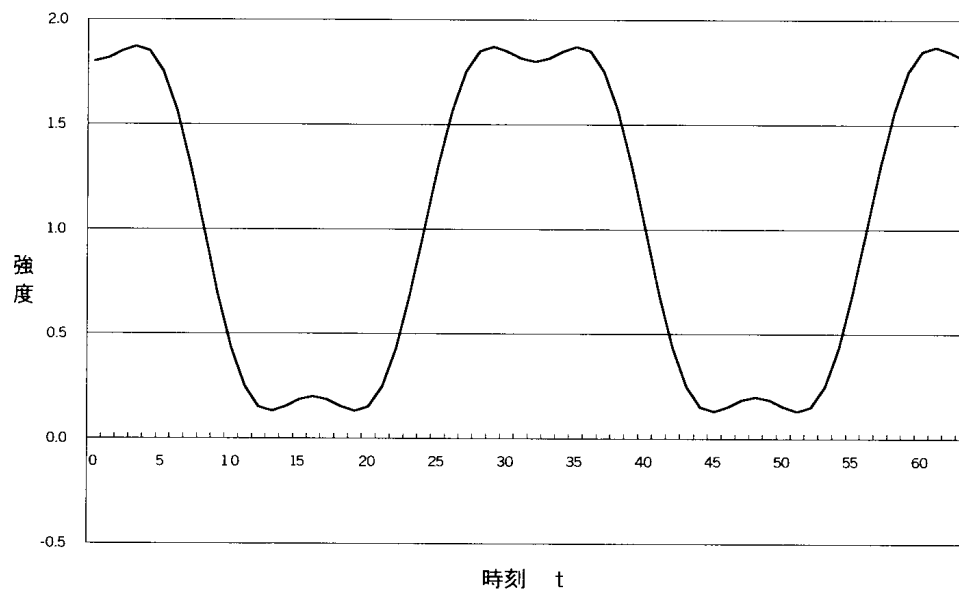
とする。ただし、サンプリング間隔  $\Delta T = 1$  として、

$$\nu_0 = \frac{1}{N\Delta T} = \frac{1}{N} \quad (2.2)$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (2.3)$$

である (第1図)。

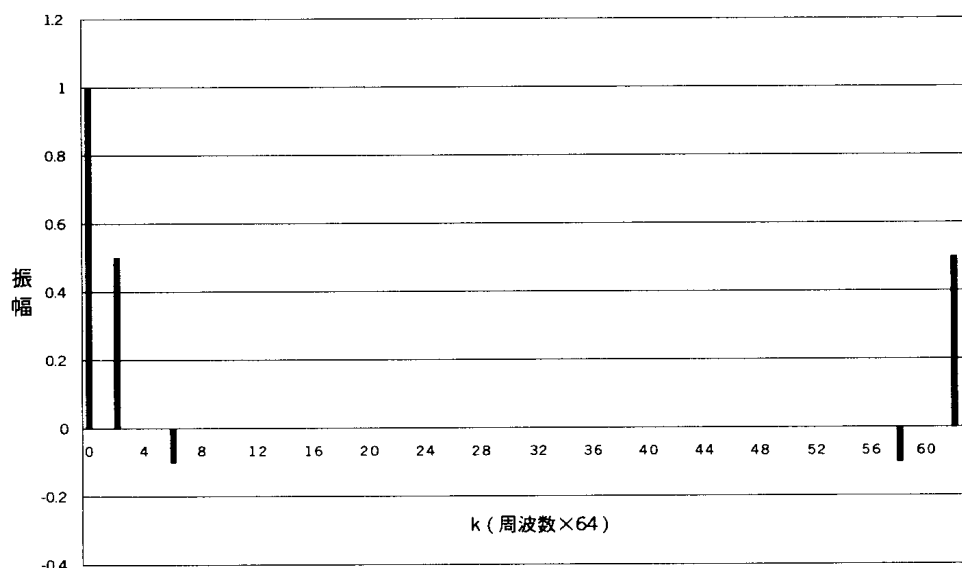
第1図 入力信号波  $f(t)$



時間を正規化したので単位は何でもよいが、説明の便宜上「秒」とする。これにより、周波数の単位はヘルツ(Hz)となる。この信号波の1秒ごとのサンプル値をデータ入力として、FFT演算した例を示す(第2図)。

前述のごとくに、周期を正規化して論じているので、現実の周期が1日であっても2ミリ秒であっても、後述の議論の本質とは関係ない(第2図では、振幅は後述の複素振幅である。虚数部はこの例ではゼロである)。

第2図では、周波数は、 $\nu = \frac{k}{64} = k\nu_0$  である。 $\nu_s = 1$  であるので、 $k$  が32を超える周波数(すなわち、0.5ヘルツを超える周波数)が結果

第2図 FFTで得られた $f(t)$ のスペクトル

に現れているのは、標本化定理に違反しているように見える ( $k$  の大きい側に見える周波数成分は、 $k=58$ と $62$ である)。実際に信号波に含まれている周波数は、 $k=2$ と $6$ であり、 $k$ が $58$ とか、 $62$ というのは、フーリエ級数の係数を近似数値積分計算で算出するつもりであれば、数値計算上の幻影ということになる。しかし、これは、無意味な値ではない。標本化定理は、このサンプリング周波数…1ヘルツ(Hz)…では「信号波に0.5ヘルツ以上の成分があっても、それはわからない→このサンプリングレートでは検出できない」ことを言うだけで、得られたこの幻影のようなものが無意味であることを積極的に主張しているわけではない。もっと複雑な例題で、うっかりFFTの結果の上半分を捨ててしまっても逆FFT(IFFT)をしてみると、元の信号に戻らなくなり混乱した経験をもつ研究者がいるはずである。第2図の振幅は、Excelの分析ツールのFFTで得られた値を、この場合のデータ数64で割ったものである(後述)。信号波の直流分は1であるから、このような操作は、まったく正しいことがわかるであろう。しかし、注意深い読者は、直流分以外のスペクトルの振幅が、「実数のみのフーリエ級数展開」の場合の正しい値の半分になっていることに気づくであろう。

FFTは複素フーリエ変換に由来し、複素フーリエ級数展開に基づいているから、実数のみのフーリエ級数の係数近似計算のつもりでいると間違ってしまうのである。このような点の解説が、私の以前に書いた論文（文献(1)）では、あまり明確ではなかった。次節において、以前に発表した論文<sup>1)</sup>と重複する部分もあるが、再検討・再計算を試みる。

なお、上記に関連して、実際のExcelの分析ツールによる計算結果は、Excelの規則の複素数表現で得られる。基本的には文字データの形をしているから、グラフを書くときは注意しなければならない。(グラフを作成するときは、適切な関数を使って実部・虚部をそれぞれ数値データに変換しなければならない(次章参照)。なお、IFFT用のデータとしては、数値データに変換せずそのまま使用できる。)

## 2.2 フーリエ級数展開とDFTの違い

複素平面における、回転因子を

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (2.4)$$

とするとき(注:この定義は、文献(3)にあわせた。私自身の論文…文献(1)とは指数関数の肩上の符号は逆に取られている)、離散的フーリエ変換DFTは

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{kn} \quad (2.5)$$

ここで、 $f_n$ は、 $n$ 番目のサンプル値である。この連立方程式を $f_n$ について解くと<sup>1)</sup>(ただし、前述の符号の違いに注意せよ)、

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W_N^{-kn} \quad (2.6)$$

となる。

実数のみのフーリエ級数展開にこだわっていると、このあたりまえの式から次のような誤解が生ずる。

「FFTの結果 ( $F_k$ ) の周波数の下半分を生かし、これを逆FFTすれば、 $k < \frac{N}{2}$  に制限した場合の近似的フーリエ展開の結果が得られる」

この誤解から、しばしば前述の「数値計算上の幻影のように見えるスペクトル」を削ってしまい失敗するのである。上記の誤解は、フーリエ級数展開の式から起こる。

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (2.7)$$

前記のごとくサンプリング周期を1に正規化した場合、 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$  である。このとき下記の式は、正しくない。

$$\frac{F_k}{N} = a_k + jb_k \quad (2.8)$$

すなわち、複素数の実数部を  $\text{Re}()$  虚数部を  $\text{Im}()$  と書いて

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \text{Re}\left(\frac{F_k}{N}\right) & (a) \\ b_k &= \text{Im}\left(\frac{F_k}{N}\right) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

とすることは、まったくの錯覚である。参考書をよく読めばそういうことは書いていないのであるが、実数のみのフーリエ級数展開にこだわると、うっかりそう信じてしまうであろう。

複素フーリエ級数は

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.10)$$

である。この式の両辺に複素指数関数をかけて、時間領域で1周期にわたり積分すると

$$\therefore C_k = \frac{1}{N} \int_0^N f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2.11)$$

となる。

この積分を方形近似計算すれば、確かに

$$C_k \cong \frac{1}{N} F_k \quad (2.12)$$

であることは間違いない。一方、(2.10) 式は、 $-\infty \sim \infty$ の項の和である。

ここで、サンプル時刻は整数値を取ると仮定しているので

$$e^{jN\omega_0 t} = e^{j2\pi m} = 1 \quad (2.13)$$

より

$$C_{-k} \cong \frac{1}{N} F_{-k} = \frac{1}{N} F_{N-k} \quad (2.14)$$

この式を利用して、(2.7) 式を参照し、和をとる範囲を周波数に関して  $0 \sim \infty$  に書き直すと、簡単な計算によって正しい式は、(2.9) 式の代わりに、

$$a_0 \cong \text{Re}(C_0) = \frac{1}{N} \text{Re}(F_0) \quad (2.15)$$

$1 \leq k \leq \frac{N}{2}$  について、

$$a_k = \text{Re}(C_k + C_{N-k}) = \frac{1}{N} \text{Re}(F_k + F_{N-k}) \quad (2.16)$$

$$b_k = -\text{Im}(C_k - C_{N-k}) = -\frac{1}{N} \text{Im}(F_k - F_{N-k}) \quad (2.17)$$

が正しい式である。

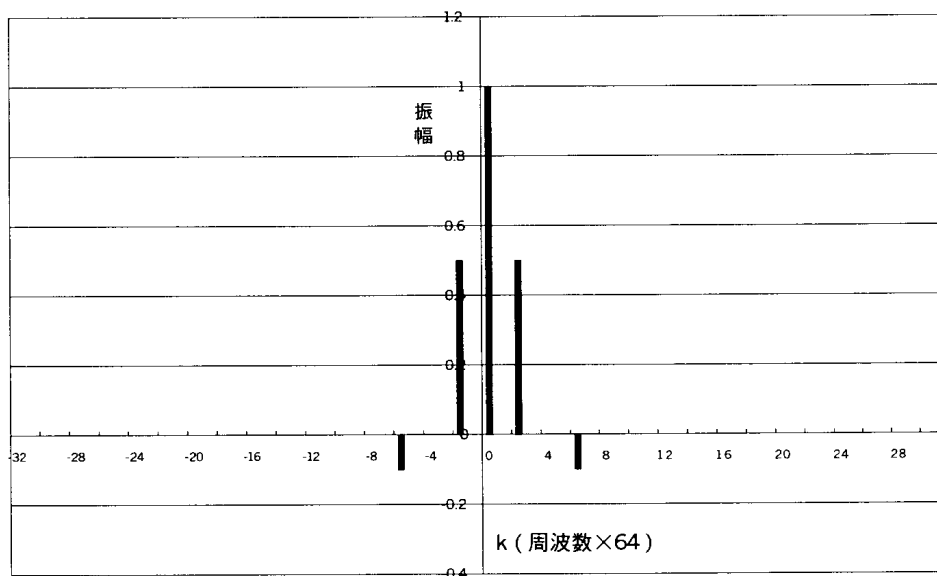
これは、通常のフーリエ級数の係数を求める式

$$a_0 = \frac{1}{N} \int_0^N f(t) dt \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{2}{N} \int_0^N f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{N} \int_0^N f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

を、方形近似で数値積分計算したものと等価である。

第3図  $f(t)$  の複素振幅 (実数部のみ)



これは、FFTで得られるものは、複素振幅  $C_k$  であるので、第2図のごとくに正だけの周波数で表現するのは不適切であり、第3図のごとくに正と負の周波数で表現すべきであることを示す。ただし、この例では、信号波が直流分と余弦関数のみを含むので、複素振幅は実数



部のみゼロでない値をとる。

(2.16)、(2.17) 式は、周波数軸上で FFT の結果の上半分を、周波数軸の負の方向に  $N\omega_0$  だけずらすと負の周波数成分となることを示す。このように、この部分は捨て去るべきものではない。

このようになる直接の理由は、周期は  $N$  であるから

$$N\omega_0 = 2\pi \quad (2.20)$$

ゆえに、サンプル時点 ( $t = \text{整数}$ ) では、 $n < \frac{N}{2}$  において

$$\left. \begin{aligned} \cos\{(N-n)\omega_0 t\} &= \cos(n\omega_0 t) & (a) \\ \sin\{(N-n)\omega_0 t\} &= -\sin(n\omega_0 t) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

であるためである。

これを見ると (2.17) 式の括弧の中が差になる理由は、(2.21 (b)) 式に負の符号があるためであることがわかる。

(2.21) 式が成立するため、そもそも、サンプリング時点以外のことを考慮していない FFT のアルゴリズムは、これらの関数（たとえば  $\cos\{(N-n)\omega_0 t\}$  と  $\cos(n\omega_0 t)$ ）を区別することは不可能である。だから、連立方程式を数値的に解くとき、FFT のソフトウェアは、アルゴリズムにししたがって、これらには等分に数値を分配するのである。しかし、前述の複素フーリエ解析の理論によれば、これは負の周波数成分にも分配したと解釈され、けして間違った計算をしたわけではない。したがって、(2.6) 式に従ってすべての  $F_k$  を用いて元に戻すように計算しなければ、IFFT が正常に実行されない。すなわち、実数のみしか考慮せず、サンプリング定理を誤解して数値計算上の幻影とみなし、計算から省いてはいけない。

もし、実数スペクトル（フーリエ展開の係数）の近似値を知りたいければ、(2.16)、(2.17) 式に従って計算すればよい。これにより、上側の周波数成分は自動的に消えてしまう。

もしも、サンプリング間隔の途中の信号値を数式で表したり、値を

知りたいときは、これらの式が有用である。

しかし、一般には、

### FFT →フィルタリング→IFFT

の方が重要で、途中の値を知ることはあまり必要がないであろう。この場合は、(2.16)、(2.17) 式を計算する必要はない。また、そのような場合は、複素スペクトルの周波数軸を、中心を直流分とし、右に正、左に負のようにとる（第3図参照）必要はなく、FFTの結果そのままでも差し支えないであろう（フィルタリングの後でIFFTを実行するためには、FFTの結果の順序を変更してはいけない。すなわち、第3図のような正しい複素スペクトルのグラフを描くためには、Excelのシート上でグラフ作成用の表が余分に必要になる）。

次章以降においては、表現の簡素化のためFFTの結果そのまま…すなわち、負の周波数成分を高周波側に配置したままで…グラフ化する方針を貫く。

## 3. 周波数空間におけるフィルタリング

前章の議論から、Excelの分析ツールの中のFFTツールのように、結果を正の周波数の側に出すタイプのソフトウェアを使用して周波数領域でフィルタリングする際は、注意が必要であることがわかる。

すなわち

「離散的周波数領域におけるフィルタは、中心周波数 ( $0.5v_s$ ) に対して、対称の形でなければならない」

のである（前章の末尾で述べたように、Excel等の表計算ソフトウェアのFFTは、負の周波数成分を周波数領域の上半分に配置する形で結果を出すように設計されている）。

なお、前章のように、サンプリング間隔を1に規格化した場合は

$$v_s = 1 \quad (3.1)$$

である。この場合、FFTで得られる周波数成分は、データ数を $N$ として、

$$v = kv_0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N-1) \quad (3.2)$$

$$v_0 = \frac{1}{N} \quad (\text{Hz}) \quad (3.3)$$

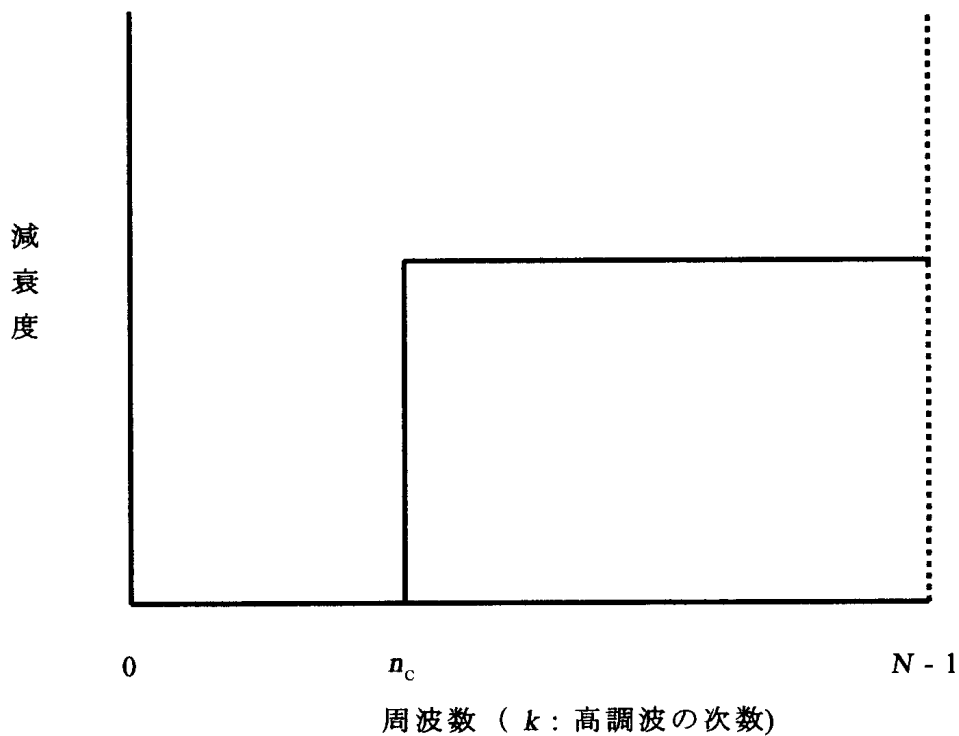
である。フィルタリングは、この仮想的周波数空間で行われる。

たとえば、ローパスフィルタであれば、カットオフ点を $n_c v_0$ にとるとき、周波数領域の下側のデータ $F_k(k=1 \sim n_c)$ と、上側のデータ $F_k(k=(N-n_c) \sim (N-1))$ を生かさなければならない( $F_0$ はいわゆる直流分であり、別格である)。

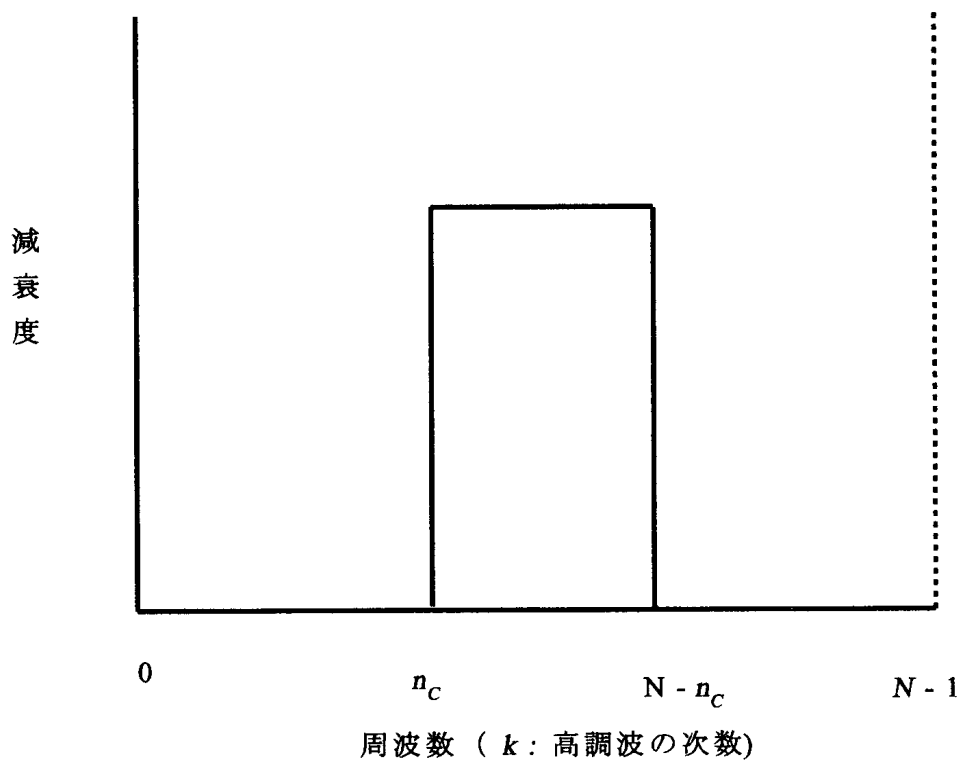
これに従わず、 $F_k(k=1 \sim n_c)$ のみを残して、ローパスフィルタをかけたつもりになり、IFFTを実行するとちょっとした混乱に陥る。得られた実時間の信号の実数部振幅は正しい信号の半分なのであるが、半分であることは気がつかない可能性がある(直流分との相対比が変わってしまう)。また、元の信号に本来なかったはずの虚数部があらわれる。その大きさは、「数値計算の誤差」とみなすにはあまりにも絶対値が大きすぎ、その解釈に苦しむことになる。

正しくないローパスフィルタの概念図を第4図に、正しいローパスフィルタの概念図を、第5図に掲げる。この図では、 $n_c v_0$ が、遮断周波数である。これらの図における減衰度のグラフは概念を示したものであり直線的であるが、実際のフィルタの減衰度としては、各種の曲線が考えられる。いろいろな周波数関数が候補として考えられるが、難解な数学で解析しても、「最適なフィルタとは、信号とノイズを同程度ずつ減衰させるもの」と言うような、「冴えない結果」しか得られない。次章の例では、「減衰度が無限大」すなわち、不要と思われる周波数成分を完全に削除してしまう例を扱う。このようなフィルタ

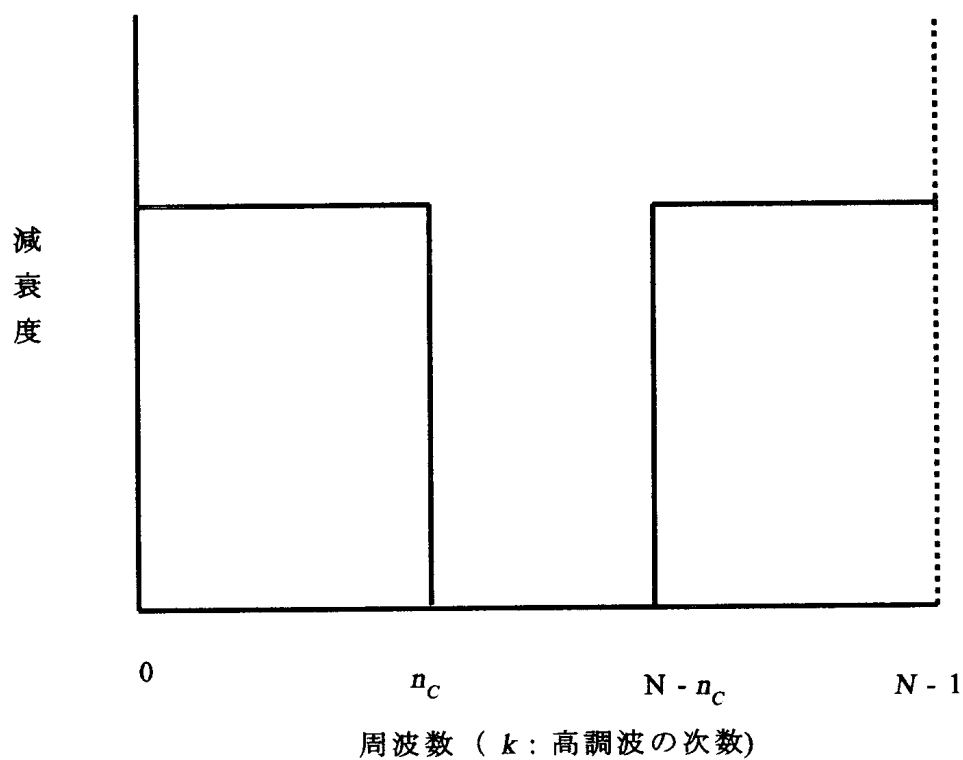
第4図 正しくないローパスフィルタの例



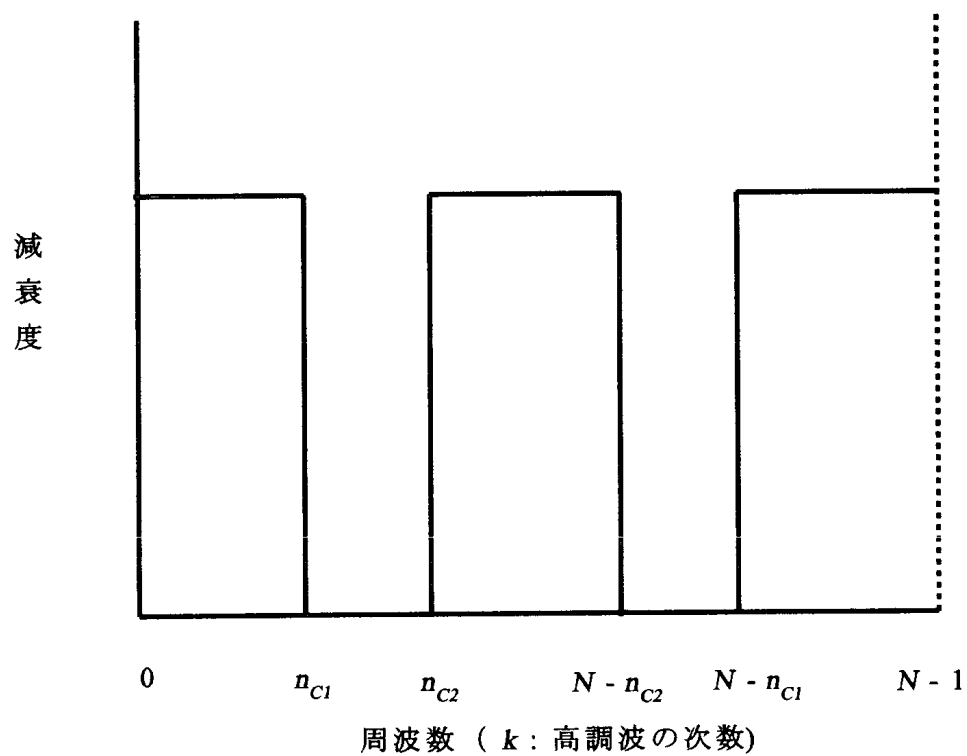
第5図 正しいローパスフィルタの例



第6図 正しいハイパスフィルタの例



第7図 正しいバンドパスフィルタの例



はハードウェアでは実現が困難または不可能であるが、ソフトウェアでは簡単に実現できる（単に不要と推定される成分を削除してからIFFTを試行すればよい）。

さらに、第6図に正しいハイパスフィルタの概念図、第7図に正しいバンドパスフィルタの概念図を掲げる。なお、第7図のバンドパスフィルタにおいて、周波数で表した通過域は、 $n_{c1}v_0 \sim n_{c2}v_0$ である。これらの概念図から、もっと複雑なフィルタの形も類推できるであろう。

#### 4. 数値計算例

ノイズの入っているデータから、フィルタリングによって信号波を検出するシミュレーションを行う。

ノイズとしては、ExcelのRAND関数を使用する。この関数は、解説書によると、0と1の間の擬似乱数を発生することになっている。問題の性質上、乱数の一様性は、さほど問題にならない。信号波の基本波の振幅を1とする。ノイズとしては、平均値ゼロに変更して、 $-0.5 \sim 0.5$ の一様乱数を考える。それでも、後述のように相当のノイズである。

一様性はさほど問題にはならないとはいえ、まずノイズ自体を検討しよう。

上記のノイズを  $u_m$  とする。Excelの式としては

$$u_m = \text{RAND()} - 0.5 \quad (4.1)$$

である（RAND関数は、引数が不要である）。

この値は擬似乱数であり、計算するたびに異なる。

$N=1024$ の場合の、たまたま使用したデータについては、平均値  $\overline{u_m}$ 、二乗平均値  $\overline{(u_m)^2}$  は

$$\overline{u_m} = \frac{\sum_{m=0}^{1023} u_m}{1024} = 0.016 \quad (4.2)$$

$$\overline{(u_m)^2} = \frac{\sum_{m=0}^{1023} (u_m)^2}{1024} = 0.0835 \quad (4.3)$$

であった。

一様乱数の場合の理論値は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{u_m} = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{(u_m)^2} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx \\ &= \frac{2}{3} (0.5)^3 = 0.083333 \end{aligned} \quad (4.5)$$

であるから、ひとまずこの点については問題ない。

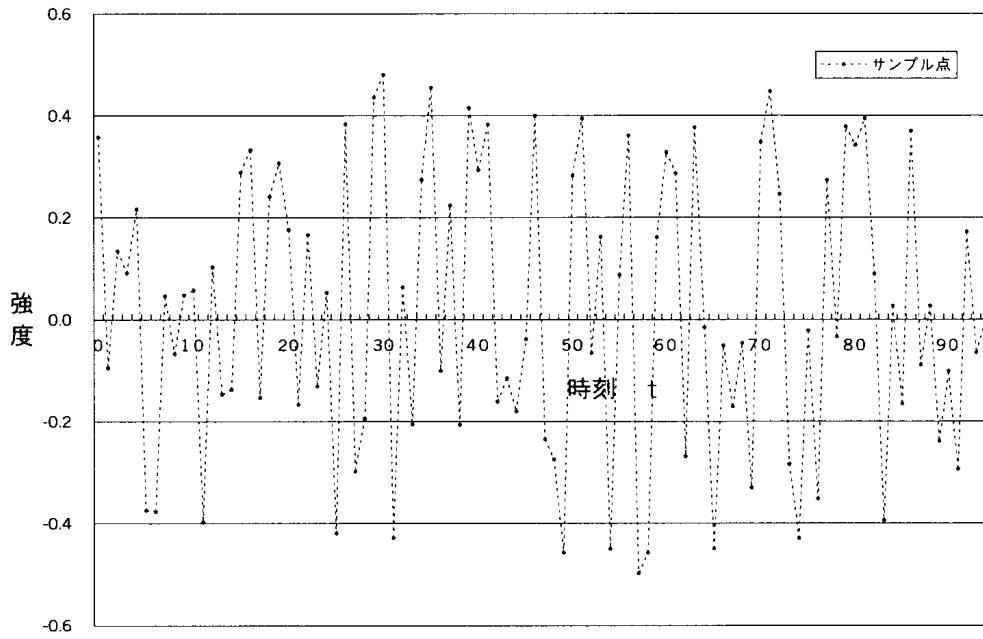
第2章の議論にしたがって、サンプリング間隔を1とする。単位は無関係であるが、単位がないと説明しづらいので、「秒」とする。この結果、周波数の単位はヘルツ(Hz)となる。このノイズの最初の100個分の実時間におけるグラフを第8図に示す。また、全時間にわたるノイズを第9図に示す。

このノイズに対してFFTを実行した場合、複素振幅を $U_k$  スペクトルの実数部の振幅を $V_k$  虚数部の振幅を $W_k$ とする。各スペクトルの振幅の絶対値を下式で定義する。

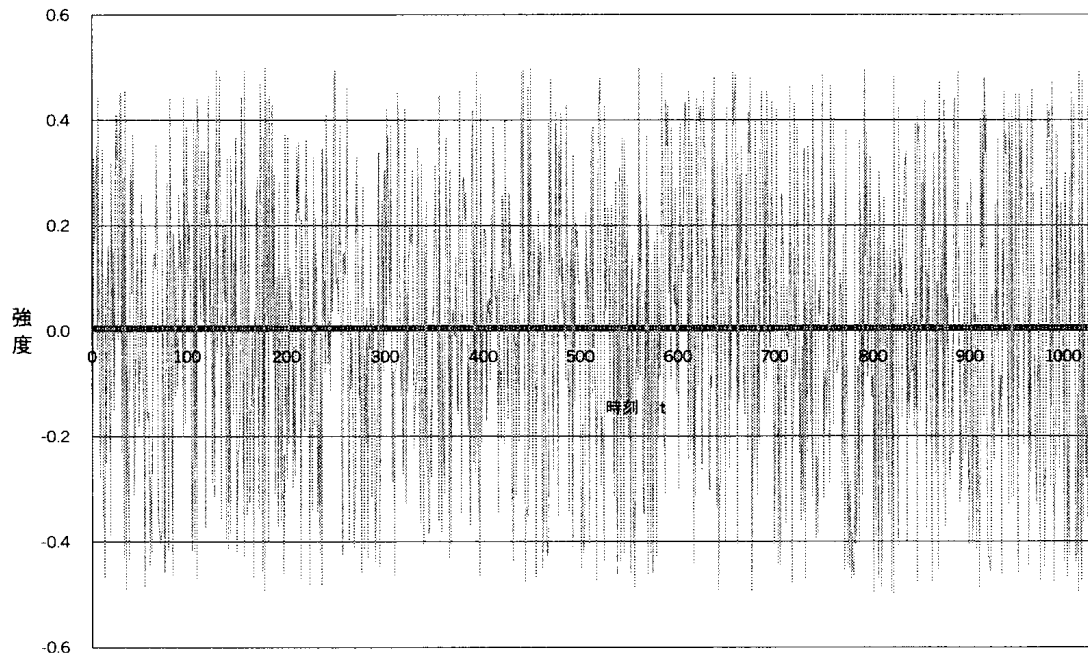
$$|U_k| = \sqrt{(V_k)^2 + (W_k)^2} \quad (4.6)$$

なお、FFTの結果は、Excelの複素数表示で出る。これは基本的には、文字データであるから、計算には注意を要する。たとえば、B5のセルに、複素数  $0.1+0.2j$  が入っているときは、このとおりの文

第8図 ノイズの例1



第9図 ノイズの例2



字並びになっている。

このとき

実数部 IMREAL(B5)

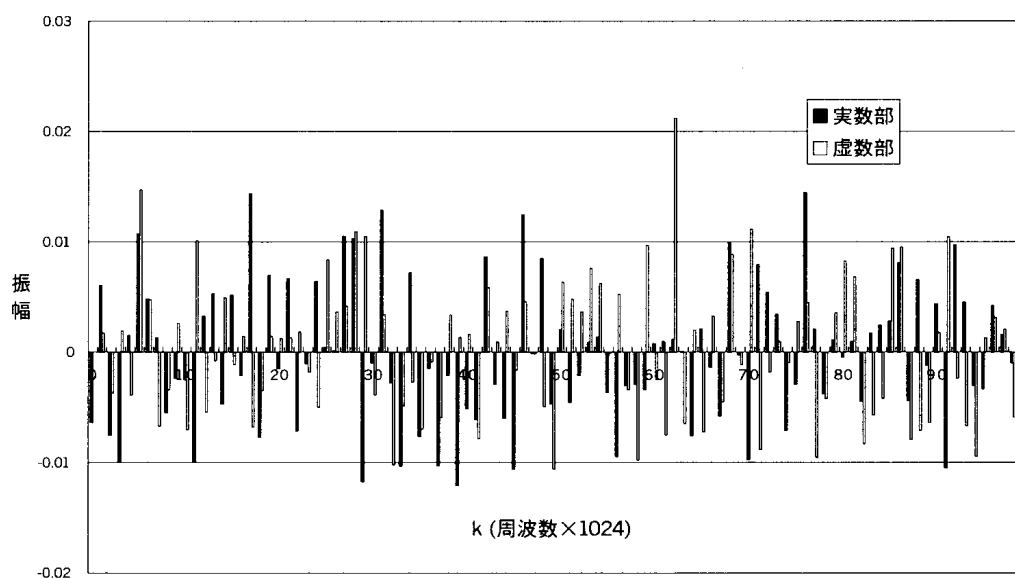
虚数部 IMAGINARY(B5)



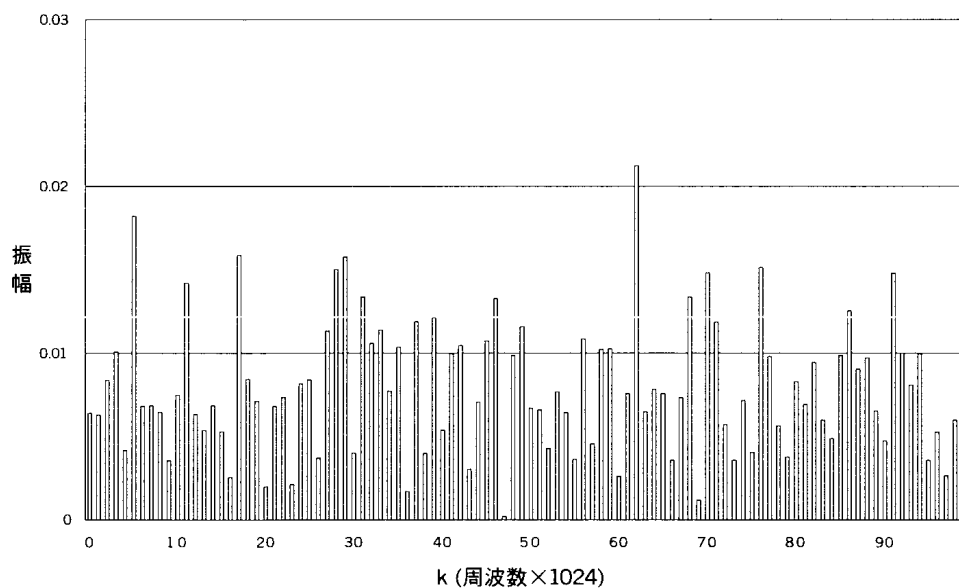
として数値データに直して計算しなければならない。これらの関数は、Excelでは、「エンジニアリング」に分類されている。

1024秒間のデータを、FFTした結果の低周波部分の100個の複素振幅を第10図に、絶対値の振幅スペクトルを第11図に示す。周期を $N$ とすると、周波数刻み $\nu_0$ は $1/N$ ヘルツとなる。グラフでは、横軸をこの $N$ 倍にとってある。また、第12図は1024個の周波数成分の絶対値の様子である。一様性があるとはいいがたいが、特定の周波数成分に偏っ

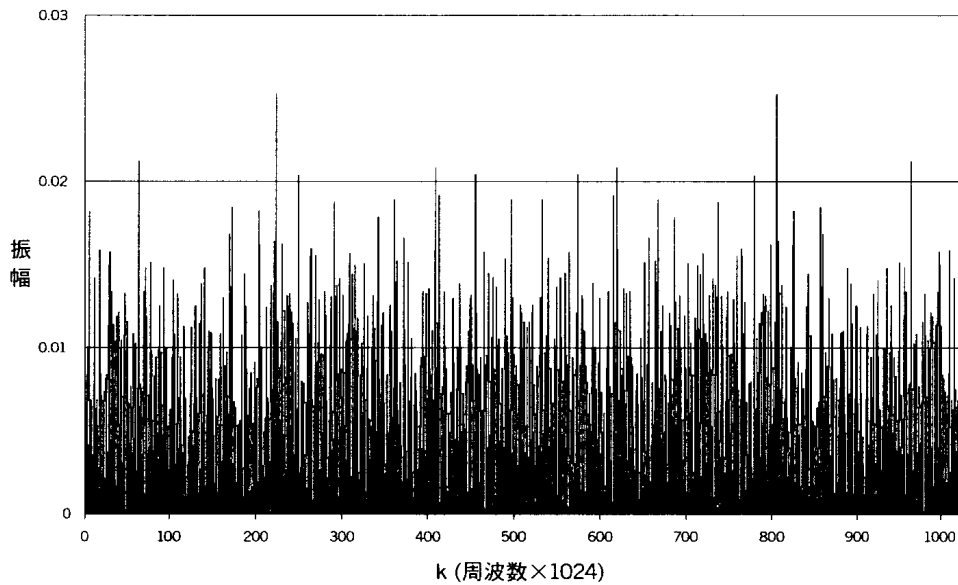
第10図 ノイズの複素スペクトル



第11図 ノイズのスペクトル (絶対値) 1



第12図 ノイズのスペクトル（絶対値）2



ていることはないと言えるであろう。

信号としては、第2章の説明で使用したものから、直流分を省いたものを採用しよう。

$$f(t) = \cos(2\omega_0 t) - 0.2 \cos(6\omega_0 t) \quad (4.7)$$

ただし、この章のシミュレーションでは、 $N=1024$ である（第13図）。

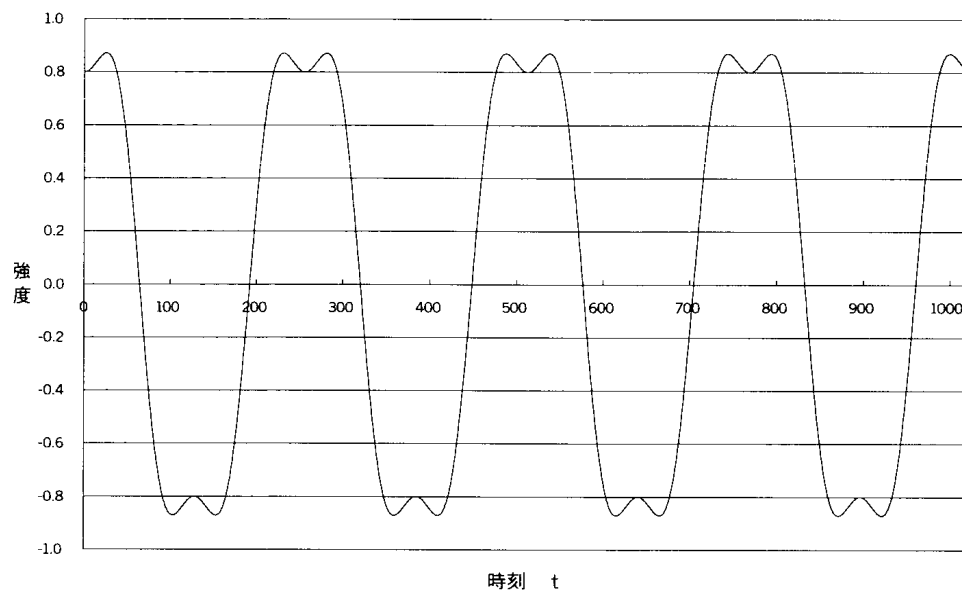
$$\therefore \omega_0 = \frac{2\pi}{1024} = 2\pi\nu_0 \quad (4.8)$$

この信号に、ノイズ  $u_m$  を重畳させると、第14図のごとくになる。このノイズの混入した信号をFFTツールによって変換し、得られたスペクトルの低周波部分を拡大したものが第15図である。

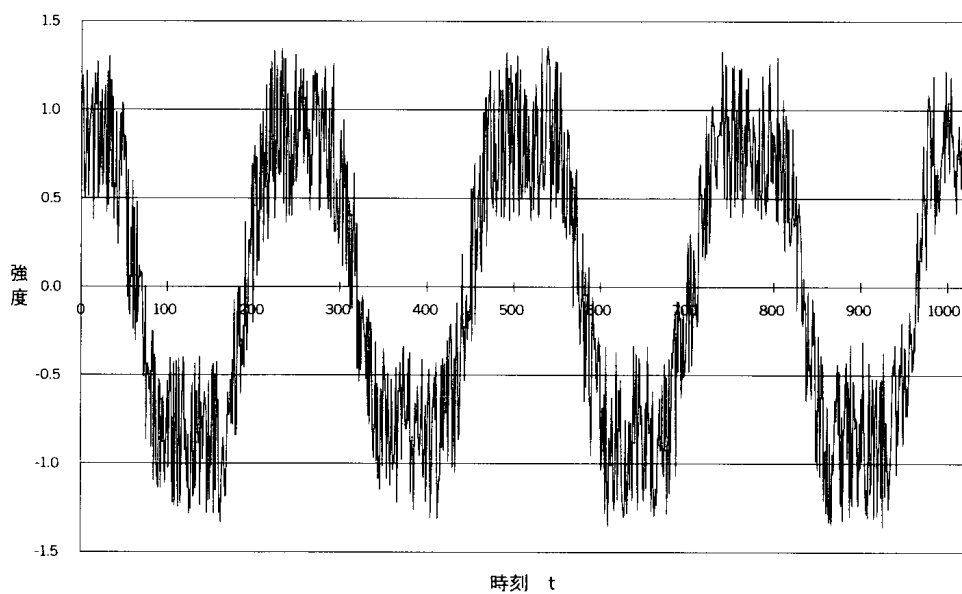
実際には、どこに信号があるかわからない状態で、解析を始めるとすれば最大の成分の近くを注目することになる。

このスペクトルに、前章で述べたバンドパスフィルタを適用する。通過域では、そのまま成分を残し、減衰域では、成分を削除してしまう（すなわち、減衰度は無限大である）。

通過域を  $k$  で表して

第13図 信号波  $f(t)$ 

第14図 ノイズを含む信号

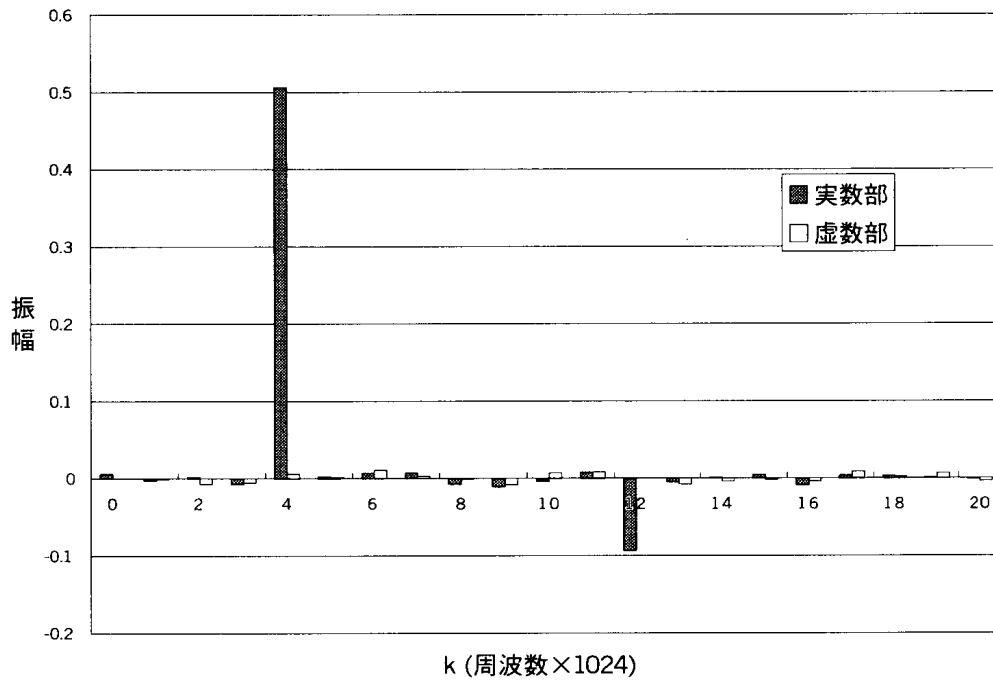


$$k = 3 \sim 13 \ \& \ 1011 \sim 1021 \quad (4.9)$$

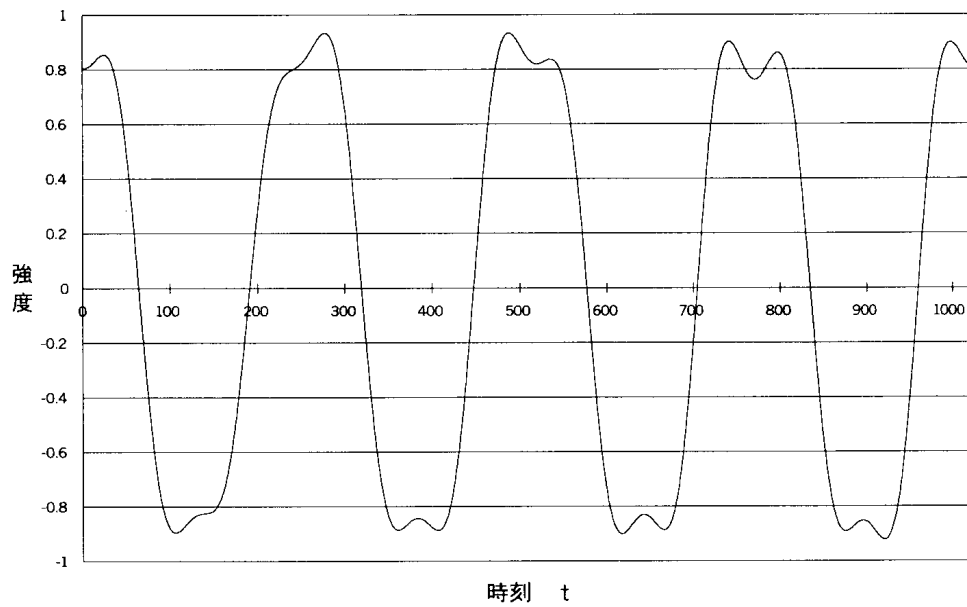
として、IFFT（高速逆フーリエ変換）を実行した結果を、第16図に掲げる。

ノイズは、ほぼ完全に除去されている。

第15図 スペクトル拡大図



第16図 バンドパスフィルタでノイズを除去した波形  
(k=3~13 & 1011~1021のデータでIFFTした結果)



## 5. 終章

Excel の分析ツール中のあるフーリエ解析ツール (FFT / IFFT) について検討し、実際に計算を試みた。複素フーリエ変換に由来する FFT と実数のみの離散的フーリエ級数展開とは異なる点が明瞭となった。この違いを心得ていなければ、周波数領域のフィルタリングをうまく実行することができないことがわかった。また、等時間間隔のデータさえ得られれば、ノイズを除去できる簡単な方法について検討した。

一般に長時間に及ぶデータが得られるほど、ノイズの除去は容易となる。また、今回は、あらかじめわかっている例題についてノイズを除去したが、一般の場合には、人間が介入して、バンドパスフィルタの通過域を試行錯誤で決定しなければならない。ケプストラム (周波数成分をさらにフーリエ変換したもの) を用いると、周期関数であれば人間の介入部分を低減できる可能性がある。今後は、もっとノイズが多い場合の周期関数波形を楕型フィルタを用いて検出する問題に取り組みたい。

本論文においては、一様乱数をノイズとして使用した。これは、正規分布する乱数の方が、実際的であったかもしれない (「通常は比較的に振幅は小さいが、例外的に大きな振幅のノイズが混入する」ケースをシミュレートできる)。

学術論文ではないので、参考文献として掲げなかったが、インターネット機器のアクセス状況に詳しい研究者の随筆に、「本来、人間的な動機による行動結果であっても、多数の (人間の) 積み重ねにより、確率理論で計算処理でき、また、それが観測とよく一致する場合がある。」という内容のものがあつた。そのような方面にこの種の計算が応用できる可能性がある。

Excel の分析ツールは、高度な数値計算の大衆化を意味し、この使用法を明らかにすることは、エンドユーザにとって有益なことである

と考える。

**【結言】** 本研究で計算に使用したパーソナルコンピュータ、EPSON HF78643GJH は、2001年度札幌大学研究助成によって購入したものである。その関係各位に厚く感謝する次第である。

[完]

**[参考文献]**

- 1) 村田茂昭「DFTとフーリエ変換の関係について」札幌大学女子短期大学部紀要 No.35 p81 (2000年)
- 2) 村田茂昭「FFT / DFTと標本化定理について」第33回計測自動制御学会北海道支部学術講演会 平成13(2001)年1月(北海道大学学術交流会館)
- 3) 佐川雅彦・貴家仁志 共著「高速フーリエ変換とその応用」p1～p77 昭晃堂(1998年)
- 4) たとえば、Henri J. Nussbaumer 著、佐川・本間 共訳「高速フーリエ変換のアルゴリズム」科学技術出版社(1989年)