

## H. Yilmaz の1958年理論の再検討 (IV)

——二つの質点間に働く引力の計算——

村田 茂昭

### 1. はじめに

すでに発表したように<sup>1)2)</sup>、H. Yilmaz の1958年理論は、重力場の弱い場合は、A. Einstein の理論と近似的に一致する。また、一般相対論の三つの検証のうち、「水星の近日点の前進」、「太陽をかすめる光線の屈折」については、Einstein の理論（具体的には、K. Schwarzschild の解）よりもはるかに手際よく証明できる。Einstein の理論は、とくに、後者の近似計算については、摂動法という近似の程度が非常にあいまいな方法以外には適切な計算方法がありそうもなく、彼 (A. Einstein) 自身も、光線の屈折角の計算に際し、最初は近似の仕方を誤って正しい値の半分になる値を発表したほどである。

さらに、H. Yilmaz の1958年理論においては、エネルギーテンソルの形が Einstein の理論とは異なり、空間-空間成分(ひずみ応力を示す)を積分すると万有引力の法則を導出できる可能性がある<sup>3)</sup>。これに反して Einstein の理論は、重力源質量のない空間では、エネルギーテンソルの各成分はすべてゼロであるから、こういうことは原理的に不可能である。

本論文においては、二つの質点間に想定した無限平面上の応力を面積分することによって、万有引力の法則を導出することを企てる。

第2章において述べることは、1980年代に Yilmaz と直接議論をする機会があり、そのときの印象を交えて Yilmaz の理論を私なりに解説したものである。(Yilmaz の論文にそう書いているというわけではない。) そのときは、すでに Yilmaz は理論を Einstein により近づけるべく検討を加えている段階であった。私は、複雑化したその後の理論よ

りも、1958年の理論のほうを重要と考える。*Yilmaz* の理論のどこが *Einstein* の哲学に反するかは終章で再び述べる。

第3章以降は、*Yilmaz* の理論に基づき私が計算したものである。なお、パーソナルコンピュータの発達によりフォントの種類が増えたので、テンソルの縮約等に関する *Einstein* の省略記法は、当初の定義どおり厳密に適用する。すなわち、本論文においては、上下に同じギリシャ文字の指標（添え字）があるときのみ指標を0から3に動かして和をとることとする。ラテン文字の指標のときは和を取らない。

たとえば、

$$T_{\mu}^{\mu} \equiv \sum_{\mu=0}^3 T_{\mu}^{\mu} \quad (1.1)$$

は、上下の指標を同時に動かした和を意味する。しかし

$$T_k^k = T_j^j \quad (i = j = k) \quad (1.2)$$

である。これは、テンソル等で上下の指標が同じ成分を示す。

## 2. *Yilmaz* のエネルギーテンソル

*H. Yilmaz* は<sup>4)</sup>、私なりに翻案すると次のように考えたと思われる。*Minkowski* 座標系を出発点にして、重力場のある空間には、ある関数  $f$  が存在しその基本テンソルは *Minkowski* 座標系とはすこし変わった形となる。それを *Yilmaz* 座標系 (*Yilmaz* 時空) と呼ぶこととすると、以前の私の論文<sup>5)</sup> の表現によれば、*Minkowski* 座標系が *Yilmaz* 座標系の枠座標系といえる。

*Yilmaz* 座標系は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

として、共変基本テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{-2f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2f} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

となる。なお、 $t$ は時刻座標である。

反変基本テンソルは、視察により下記のごとくになる。

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{2f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2f} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

なお、*Yilmaz* の原論文では、この指数関数の肩に乗っている関数を  $\phi$  としているが、私はこの文字を *Newton* の 3次元重力スカラ関数に使用したいので、文字を  $f$  に変えた。

なお *Yilmaz* は、しばしば、光速度を 1 と置く座標系で論じているが、私はわかりやすさのため、あくまでも真空中の光速度は  $c$  と書くこととする。

この基本テンソルに基づき、*Ricci* のテンソルの各成分を計算すると次のようになる（付録Ⅱ参照）。

（4次元リーマン空間であるので、すべてが空間座標であるのだが、

便宜上3次元の座標を空間座標と呼び、時間を示す座標を時間座標と呼ぶ。テンソルの成分についてもこれに準じる。

*Ricci* のテンソルの時間-時間成分については

$$R_{00} = -3f_{00} - e^{-4f}(f_{11} + f_{22} + f_{33}) - 6(f_0)^2 \quad (2.4)$$

空間-空間成分については

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= e^{4f}f_{00} - f_{11} - f_{22} - f_{33} + 4e^{4f}(f_0)^2 - 2(f_1)^2 & (a) \\ R_{22} &= e^{4f}f_{00} - f_{11} - f_{22} - f_{33} + 4e^{4f}(f_0)^2 - 2(f_2)^2 & (b) \\ R_{33} &= e^{4f}f_{00} - f_{11} - f_{22} - f_{33} + 4e^{4f}(f_0)^2 - 2(f_3)^2 & (c) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= R_{21} = -2f_1 f_2 & (a) \\ R_{13} &= R_{31} = -2f_1 f_3 & (b) \\ R_{23} &= R_{32} = -2f_2 f_3 & (c) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

空間-時間成分については

$$\left. \begin{aligned} R_{10} &= R_{01} = -2f_{01} - 2f_0 f_1 & (a) \\ R_{20} &= R_{02} = -2f_{02} - 2f_0 f_2 & (b) \\ R_{30} &= R_{03} = -2f_{03} - 2f_0 f_3 & (c) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

となる。

これより、空間の曲率を計算すると次のようになる<sup>1)</sup>。

$$\begin{aligned} R &= R_{\mu}^{\mu} \\ &= 6f_{00}e^{2f} - 2e^{-2f}(f_{11} + f_{22} + f_{33}) + 18(f_0)^2 - 2e^{-2f}\left((f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} f_k &\equiv \frac{\partial f}{\partial x^k} \\ f_{ik} &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

である。

この曲率の値は、参考文献 (1) では、異常 *Riemann* 空間 2 型の曲率  $R'$  と表記されている。これは、非常に複雑な形をしている。 $R'$  が 4 次元スカラであることは数学的に証明されているので、 $f$  は一般には 4 次元スカラではありえないことが文献 (1) の主題である。

ここで、 $f$  が、時刻座標に依存しない場合 (*Yilmaz* の言うところの *time-independent case*) を考える。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_{00} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

であると、(2.4) ~ (2.7) 式より、

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{-4f}\nabla^2 f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla^2 f - 2(f_1)^2 & -2f_1 f_2 & -2f_1 f_3 \\ 0 & -2f_2 f_1 & -\nabla^2 f - 2(f_2)^2 & -2f_2 f_3 \\ 0 & -2f_3 f_1 & -2f_3 f_2 & -\Delta f - 2(f_3)^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

ただし

$$\nabla^2 f \equiv f_{11} + f_{22} + f_{33} \quad (2.12)$$

(もちろん、これは 3 次元の演算子である。)

この *time-independent case* では、4 次元の曲率は

$$R = -2e^{-2f} \nabla^2 f - 2e^{-2f} \left( (f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 \right) \quad (2.13)$$

となる。

これは、(2.10) 式の拘束条件のもとで

$$R = -2g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f - 2g^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f \quad (2.14)$$

と書くことができる。

ただし

$D_\mu$  : 座標  $x^\mu$  に関する共変微分演算子

$\partial_\mu$  : 座標  $x^\mu$  に関する偏微分演算子

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.15)$$

である。(2.14) 式には、あくまでも (2.10) 式の拘束 (*Yilmaz* が言うところの *time-independent case*) がかかっていることに注意が必要である。またこの場合の基本テンソル  $g_{\mu\nu}$  を、もう少し具体的に述べると、(2.2) 式の基本テンソルを持つ系から時間を含まない、空間だけの一般座標変換でたどり着ける系の基本テンソルである。

(2.13) 式を見ると、指数関数の項が共通にくくり出せるので、もしも重力場と取り去った座標系 (枠座標系) の、3次元空間部分で

$$\nabla^2 f = 0 \quad (2.16)$$

式が成立しておれば、(2.13) 式の第1項すなわち (2.14) 式の第1項は消えてしまう。

この場合

$$R = -2e^{-2f} \left( (f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 \right) \quad (2.17)$$

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2(f_1)^2 & -2f_1f_2 & -2f_1f_3 \\ 0 & -2f_2f_1 & -2(f_2)^2 & -2f_2f_3 \\ 0 & -2f_3f_1 & -2f_3f_2 & -2(f_3)^2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

となる。

*Einstein* のテンソルは、この仮定のもとで

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -((f_1)^2+(f_2)^2+(f_3)^2)e^{-2f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(f_1)^2+(f_2)^2+(f_3)^2 & -2f_1f_2 & -2f_1f_3 \\ 0 & -2f_2f_1 & (f_1)^2-(f_2)^2+(f_3)^2 & -2f_2f_3 \\ 0 & -2f_3f_1 & -2f_3f_2 & (f_1)^2+(f_2)^2-(f_3)^2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

と書くことができる。

3次元でしか正しくない式を4次元に拡張することは問題なのであるが、少なくともある種の近似であるという *Yilmaz* の主張に従って解析を続けよう。

time- independent situations においては、

$$R = -2g^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu f \quad (2.20)$$

と、形式的に書くことができる。

逆に一般の場合、(2.17) 式を、Lagrangian として、変分法を適用してみよう。

$$L = KR = -2Kg^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu f \quad (2.21)$$

ただし、 $K$ は、境界条件によって定まる任意定数である。4次元の作用積分を

$$S = \int L \sqrt{-g} d\Omega \quad (2.22)$$

とする。ただし、 $g$ は、共変基本テンソルの作る行列式の値である。

汎関数を 4次元スカラ  $f$  にとった場合、 $S$ の変分をゼロとする *Euler* の式は、

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L \sqrt{-g}}{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right)} - \frac{\partial L \sqrt{-g}}{\partial f} = 0 \quad (2.23)$$

*Yilmaz* は、この式から、(2.16) 式の4次元版である

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f = 0 \quad (2.24)$$

すなわち

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right) = 0 \quad (2.25)$$

が得られることを期待したのかもしれないが、*Lagrangian* が、4次元的に厳密に、(2.21) 式の形をとっても、そうはならない。(2.23) 式の第2項目が消えず、非線形の偏微分方程式になってしまう。この点については、そもそも、*Yilmaz* 時空の曲率は、(2.20) 式の形ではなく、(空間部分がデカルト的である場合) (2.8) 式のようになるためであるが、ここでは、これ以上は立ち入らない。したがって、3次元でしか正しくない式を、4次元風に取り扱うことになる。

(2.20) 式で表される *Lagrangian* の変分計算において、汎関数を  $g^{\mu\nu}$  とすると、エネルギーテンソルは



$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L \sqrt{-g}}{\partial \left( \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)} - \frac{\partial L \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \quad (2.26)$$

これは、第2項のみが値をもつので、簡単に計算できて

$$T_{\mu\nu} = -2K f_\mu f_\nu + K g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \quad (2.27)$$

ここで、次の式を使用した。

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} = -g g_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

*Einstein* の重力場の理論では、エネルギーテンソルは

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \quad (2.29)$$

ここで、 $\kappa$  は、*Einstein* の重力定数で、下記のような値である。

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (2.30)$$

ただし、

$G$  : *Newton* の万有引力の定数

である。

そうすると、*Yilmaz* が求めたエネルギーテンソルは、

$$K = \frac{1}{\kappa} \quad (2.31)$$

であると、数値的には *Einstein* の理論と一致する。(あくまでも、time-independent case であるが)

*Yilmaz* は原点近くの特異点以外は、(2.16) 式が成り立っていると考えた (宇宙論というよりは、質点の理論を目指したと考えられる)。この式が成立しておれば、*Newton* 力学の理論がかなり流用できる。たとえば、太陽等の天体を質点の集合とみなした場合、3次元のスカラポテンシャル  $f$  は、3次元積分によって求めることができる。

なお、*Yilmaz* の3次元スカラと *Newton* の重力理論のスカラとの関係は

$$\phi = -\frac{f}{c^2} \quad (2.32)$$

である。

ここで

$\phi$  : *Newton* の重力場の3次元スカラ

$f$  : *Yilmaz* の重力場の3次元スカラ

である。

このように、重力場のスカラを定めると、time-independent case においては、*Yilmaz* が Lagrangian 解析を行って求めたエネルギーテンソル (2.27) と、*Yilmaz* 時空の *Ricci* のテンソルから *Einstein* の理論によって求めたエネルギーテンソル (2.29) は、任意定数倍をぬかし、数式上は一致する。

次章においては、二つの質点間に働く引力が、*Newton* の万有引力に等しいためには、この任意定数が、まさに *Einstein* の係数である必要がある (すなわち (2.31) が成立する) ことを示す。

何度も述べたように、*Yilmaz* のスカラは、3次元スカラであって、その意味では、完全な重力場の理論ではないが、すくなくとも、よい近似であろう。

### 3. 二つの質点に働く重力

前章で述べたとおり、4次元のエネルギーテンソルの形そのものは、*Ricci*のテンソルであらわしたとき、*Einstein*の重力場理論と *Yilmaz*の重力場の理論では変わりはない。しかし、*Einstein*の理論では、重力源質量のない空間では、すべての成分がゼロであるが、*Yilmaz*の理論ではそうはならない。これは、基本テンソルの形による。*Yilmaz*時空の基本テンソルは、*Schwarzschild*時空のそれと、第1次近似が、たまたま同じでも第2次近似以降は異なるからである。

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x, y, z) \quad (3.1)$$

とすると、*Yilmaz*のエネルギーテンソルは、time-independent caseの場合で、かつ特異点以外で *Yilmaz*のスカラ方程式 ((2.16) 式) が成立しているとする、

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left((f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2\right)e^{-2f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 & -2f_1f_2 & -2f_1f_3 \\ 0 & -2f_2f_1 & (f_1)^2 - (f_2)^2 + (f_3)^2 & -2f_2f_3 \\ 0 & -2f_3f_1 & -2f_3f_2 & (f_1)^2 + (f_2)^2 - (f_3)^2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

である。この4次元エネルギーテンソルの空間-空間成分は、応力テンソルであることが知られている。

実際のカ  $F$  は、エネルギーテンソルの混合成分を積分したものである。

$$T_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\alpha} T_{\mu\alpha} \quad (3.3)$$

$$F_{\mu} = \int T_{\mu}^{\nu} dS_{\nu} \quad (3.4)$$

ただし、 $dS_{\nu}$ は、面素ベクトルである。

前述のごとく、もともと *Yilmaz* の重力場の理論は、完全には4次元化されていないが、4次元の式 (3.4) の形を想定して計算を進める。

第2章の結果と (3.3) 式より、空間-空間成分について

$$T_k^k \propto e^{-2f} \quad (3.5)$$

$$dS_{\nu} \propto \sqrt{-g} \propto e^{2f} \quad (3.6)$$

ゆえに、混合エネルギーテンソルの空間-空間成分に含まれる指数関数の項と、 $\sqrt{-g}$  に含まれる指数関数の項は打ち消しあうから、この因子は考慮しなくともよい。

以下においては、3次元空間で解析を進める。

$$(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z) \quad (3.7)$$

3次元の共変基本テンソルは

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3次元の反変基本テンソルは

$$g^{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

である。

3次元の応力テンソルは

$$T_{ik} = K \begin{bmatrix} -(f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 & -2f_1f_2 & -2f_1f_3 \\ -2f_2f_1 & (f_1)^2 - (f_2)^2 + (f_3)^2 & -2f_2f_3 \\ -2f_3f_1 & -2f_3f_2 & (f_1)^2 + (f_2)^2 - (f_3)^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3次元の量について、基本テンソル以外は、特に字体を変えないが、指標をラテン体とし、*Einstein* の省略記法は使用しない。また  $K$  は、この段階では未定係数である。

これは、次のように書き直したほうが作業がしやすい。

$$\begin{aligned} T_{ik} &= -2K \begin{bmatrix} (f_1)^2 & f_1f_2 & f_1f_3 \\ f_2f_1 & (f_2)^2 & f_2f_3 \\ f_3f_1 & f_3f_2 & (f_3)^2 \end{bmatrix} + K g_{ik} \left( (f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 \right) \\ &= -2K \begin{bmatrix} (f_1)^2 & f_1f_2 & f_1f_3 \\ f_2f_1 & (f_2)^2 & f_2f_3 \\ f_3f_1 & f_3f_2 & (f_3)^2 \end{bmatrix} + K g_{ik} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 g^{mn} f_m f_n \end{aligned} \quad (3.11)$$

混合成分は

$$T_i^k = -2K \begin{bmatrix} (f_1)^2 & f_1f_2 & f_1f_3 \\ f_2f_1 & (f_2)^2 & f_2f_3 \\ f_3f_1 & f_3f_2 & (f_3)^2 \end{bmatrix} + K \delta_i^k \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 g^{mn} f_m f_n \quad (3.12)$$

ただし

$$\delta_i^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

(3.4) 式を、3次元で書くと

$$F_k = \int \sum_{i=1}^3 T_k^i dS_i \quad (3.14)$$

$$dS_i = \frac{1}{2} \sqrt{g} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 e_{imn} dx^m dx^n \quad (3.15)$$

ここで、 $e_{ijk}$  は3次元の共変的 *Levi-Civita* の記号である。

$$e_{ijk} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (i, j, k) \rightarrow (1, 2, 3) \text{ 偶置換} \\ -1 & (i, j, k) \rightarrow (1, 2, 3) \text{ 奇置換} \\ 0 & \text{上記以外の場合} \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

また

$$g = \det [\text{mat}(g_{ik})] \quad (3.17)$$

ここで

$\det(x)$  : 行列  $x$  の行列式

$\text{mat}(X)$  : 2階のテンソル  $X$  から作られる行列

である。

(3.11) ~ (3.17) は、3次元の平坦な一般座標系の式である。

*Yilmaz* のスカラの満たすべき式は

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^m} \left( \sqrt{g} \sum_{n=1}^3 g^{mn} \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) = 0 \quad (3.18)$$

上式の、質点が原点にある場合の球対称解はよく知られている。*Yilmaz* は、指数関数の引数が無次元量になるよう係数を定めたので、質点から  $R$  離れた観測点で

$$f = \frac{G}{c^2} \frac{1}{R} \quad (3.19)$$

この式自身は、符号と係数を除き、*Newton* の理論そのものであるが、*Yilmaz* の理論においては、空間に応力テンソルが存在する。この応力テンソルは、*Newton* の重力理論になかったものである。*(Einstein* の理論においては、応力テンソル…エネルギーテンソルの空間-空間成分…の概念はあるが、その値は、重力源質量の分布範囲外においては、恒等的にゼロである。)

(3.18) 式は、線形の式であることに注意すべきである。すなわち、質点が複数あるとき、質点内部（または特異点）以外では、重ねあわせが可能である。

第1図のごとくに、 $z$  軸上の点 A に、質量  $m_1$  の質点が、点 B に質量  $m_2$  の質点がある。

任意の点 P のポテンシャルは (3.19) 式より

$$f = \frac{G}{c^2} \left( \frac{m_1}{AP} + \frac{m_2}{BP} \right) = \frac{\alpha_1}{AP} + \frac{\alpha_2}{BP} \quad (3.20)$$

ただし

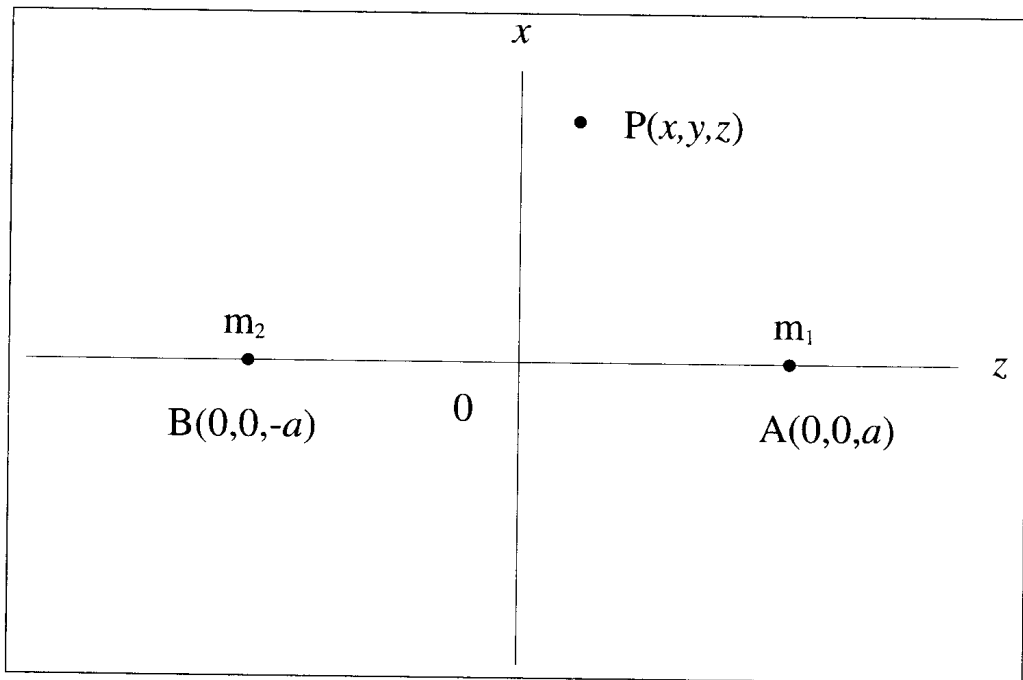
$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &\equiv \frac{G m_1}{c^2} & (a) \\ \alpha_2 &\equiv \frac{G m_2}{c^2} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

以下において、円筒座標で解析をすすめる。

$$(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (x^0, r, \varphi, z) \quad (3.22)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.23)$$

第1図 z軸上にある二つの質点



$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.24)$$

3次元の一般座標変換の手続きに従って計算を進めるとよいが、簡単であるので詳細は省略し、さしあたり必要な基本テンソルのみを記す。

$$g'_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$g'^{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$



円筒座標系で計算すれば

$$\left. \begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{r^2 + (z - a)^2} & (a) \\ \overline{BP} &= \sqrt{r^2 + (z + a)^2} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

$$f = \frac{\alpha_1}{\sqrt{r^2 + (z - a)^2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{r^2 + (z + a)^2}} \quad (3.28)$$

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial r} = \alpha_1 r (r^2 + (z - a)^2)^{-\frac{3}{2}} + \alpha_2 r (r^2 + (z + a)^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.29)$$

この系は、 $z$  軸に関して、軸対称であるから

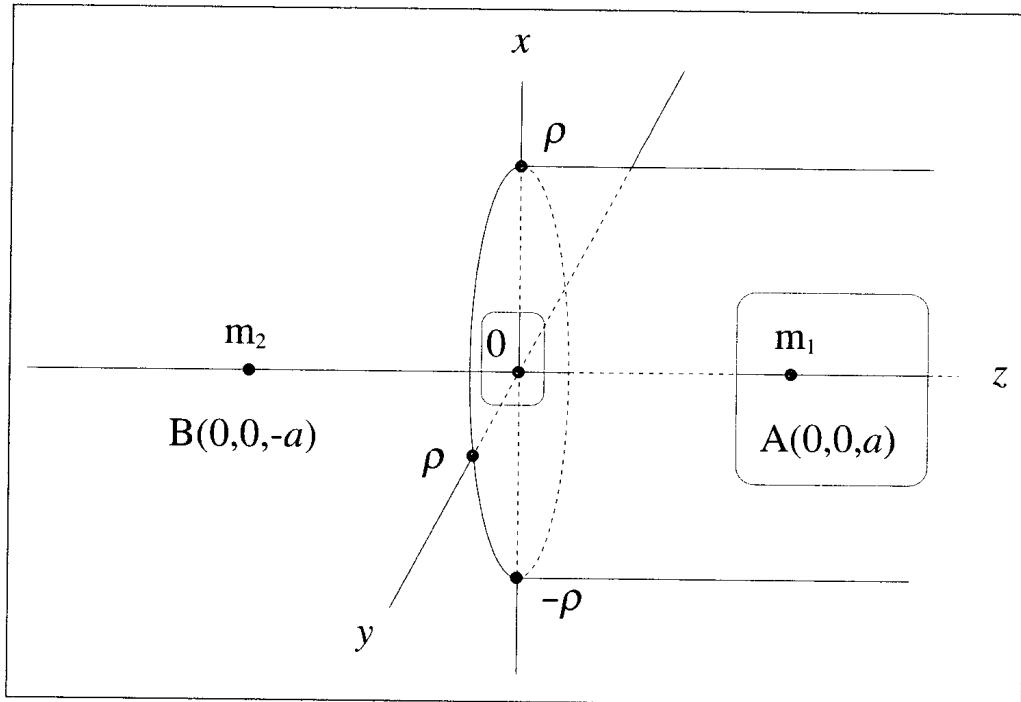
$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \alpha_1 (z - a) (r^2 + (z - a)^2)^{-\frac{3}{2}} + \alpha_2 (z + a) (r^2 + (z + a)^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

この系では、マクロな力は、 $z$  軸方向にしか働かない。すなわち、値を持つのは、 $F_3$ のみである。これが、2つの質点間に働くと予想される引力である。

(3.14) 式の面積分を実行するために、第2図のごとく、質点1を含む半無限状円筒を考える。ただし、この円筒の底面は、 $x-y$  平面上で原点  $O$  を中心として半径  $\rho$  の円である。この円筒の表面で面積分を実行し、その後、 $\rho$  を無限大にした極限をとると、質点1と2の間に働く力が求められる。

第2図 二つの質点を隔てる半無限長円筒



$$F_3 = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int \sum_{n=1}^3 T_3^n dS_n \quad (3.32)$$

(3.30) 式より、

$$T_3^2 = 0 \quad (3.33)$$

極限をとる前の力に、' (prime) をつけて記すと

$$F'_3 = \int_{\text{側面}} T_3^1 dS_1 + \int_{\text{底面}} T_3^3 dS_3 \quad (3.34)$$

$$\int_{\text{側面}} T_3^1 dS_1 = -2K \int_{z=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f_3 f_1 r d\varphi dz = -4\pi K \rho \int_{z=0}^{\infty} f_3 f_1 dz \quad (3.35)$$

( $\because \sqrt{g} = r = \rho$ )

$$\begin{aligned}
f_3 f_1 &= \left( \alpha_1(z-a) \left( r^2 + (z-a)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + \alpha_2(z+a) \left( r^2 + (z+a)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right) \\
&\times \left( \alpha_1 r \left( r^2 + (z-a)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + \alpha_2 r \left( r^2 + (z+a)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (3.36)
\end{aligned}$$

(3.35) 式を、下記の形に書く。

$$\int_{\text{側面}} T_3^1 dS_1 = -4\pi K \left( (\alpha_1)^2 I_1 + \alpha_1 \alpha_2 I_2 + (\alpha_2)^2 I_3 \right) \quad (3.37)$$

定積分を実行すると

$$I_1 = \rho^2 \int_0^\infty \frac{(z-a) dz}{\left( \rho^2 + (z-a)^2 \right)^3} = \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{\left( \rho^2 + a^2 \right)^2} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2\rho^2 \int_0^\infty z \left( \rho^2 + (z-a)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \rho^2 + (z+a)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} dz \\
&= \frac{1}{4a^2} \left( 1 - \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + a^2} \right) \quad (3.39)
\end{aligned}$$

$$I_3 = \rho^2 \int_0^\infty \frac{(z+a) dz}{\left( \rho^2 + (z+a)^2 \right)^3} = \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{\left( \rho^2 + a^2 \right)^2} \quad (3.40)$$

(付録Ⅲ参照)

ゆえに

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{\rho \rightarrow \infty} I_3 = 0 \quad (3.41)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_2 = \frac{1}{4a^2} (1 - 1) = 0 \quad (3.42)$$

$$\therefore \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\text{側面}} T_3^1 dS_1 = 0 \quad (3.43)$$

かくして、 $z$  方向に働く力は、(3.34) 式の第2項のみとなった。この計算では、もはや、半径  $\rho$  の円板上（円筒の底面）で積分してから  $\rho$  を無限大にする操作は不要である。直接  $x$ - $y$  平面上で積分するとよい。

$$\begin{aligned} F_3 &= \int_{z=0} T_3^3 dS_3 = K \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \left( (f_1)^2 - (f_3)^2 \right) r dr \\ &= 2\pi K \int_0^\infty \left( (f_1)^2 - (f_3)^2 \right) r dr \end{aligned} \quad (3.44)$$

積分は、 $x$ - $y$  平面上（すなわち  $z = 0$ ）で行うので、被積分関数の形は簡単になる。

$$f_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{z=0} = (\alpha_1 + \alpha_2) r (r^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.45)$$

$$f_3 = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} = -(\alpha_1 - \alpha_2) a (r^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.46)$$

$$F_3 = 2\pi K (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \int_0^\infty \frac{r^3 dr}{(r^2 + a^2)^3} - 2\pi K (\alpha_1 - \alpha_2)^2 a^2 \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^3} \quad (3.47)$$

この式を下記のように書き換えると

$$F_3 = 2\pi K (\alpha_1 + \alpha_2)^2 I_4 - 2\pi K (\alpha_1 - \alpha_2)^2 a^2 I_5 \quad (3.48)$$

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{r^3 dr}{(r^2 + a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \quad (3.49)$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^3} = \frac{1}{4a^4} \quad (3.50)$$

(付録Ⅲ参照)

(3.49), (3.50) 式より

$$\begin{aligned} F_3 &= 2\pi K \left( (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \right) \frac{1}{4a^2} \\ &= \frac{8\pi K \alpha_1 \alpha_2}{4a^2} = \frac{8\pi K G^2 m_1 m_2}{4a^2 c^4} \end{aligned} \quad (3.51)$$

一方、*Newton* の万有引力の法則によれば

$$F_3 = \frac{G m_1 m_2}{4a^2} \quad (3.52)$$

である。両式を比べると、

$$K = \frac{c^4}{8\pi G} = \frac{1}{\kappa} \quad (3.53)$$

でなければならない。

#### 4. 終章

*H. Yilmaz* の理論が、*Einstein* 学派にまったく受け入れられなかった理由は、エネルギーテンソルにの違いにあると思われる。すなわち、重力源質量のない空間部分では、*Einstein* の理論ではエネルギーテンソルのすべての成分がゼロでなければならない。

それに反して、*Yilmaz* は…電磁場のエネルギーテンソルの空間-空間成分が、応力テンソル (*Maxwell* の歪み力テンソル) となるように…重力場においても、重力源質量の存在しない空間部分に応力が存在する理論を作り上げた。その応力を私が面積分して、*Newton* の万有引

力となることを証明したのである。

しかし、*Einstein*とは異なる方法で重力場の理論を展開したにもかかわらず、*Yilmaz*の理論をつきつめて行き *Einstein*の定数に到達した。*Einstein*の重力理論は、第1次近似で *Newton*の重力場理論に一致するから当然と言う考えもあるかもしれないが、「*Einstein*には、空間の応力分布を積分して二つの質点間の重力を計算する考えはまったくなかったのに！」である。

それにしても、「*Einstein*はどうやってこの定数を決定したのか？」科学史を勉強しなおさなくてはならない。

なお、*Yilmaz*のエネルギーテンソルの時間-時間部分は、当然のことながらエネルギーの項である。これを積分すると、質量に相当するものが得られるはずである (*Yilmaz*も計算している)。しかし、私の試算によれば、中心のみが特異点の粒子モデルではうまく行きそうにもない。もともと *Yilmaz*のスカラ方程式は、分布質量があっても差し支えないが、質量に関する問題が重力場に関する項だけで閉じてしまうことは、ありそうもないことである。

今後は *Yilmaz*のスカラの4次元化と、もうひとつの古典場である電磁場の取り込みを課題として、引き続き検討を進める予定である。

[完]

### 参考文献

- 1) 村田茂昭「四次元時空の基本テンソルと重力場の四次元スカラの関係について—*H. Yilmaz* の1958年理論の再検討—」札幌大学女子短期大学部紀要21号 pp21~28 平成5年3月(1993.3)
- 2) 村田茂昭「*H. Yilmaz* の1958年理論の再検討(Ⅱ)」札幌大学女子短期大学部紀要31号 pp43~62 平成10年3月(1998.3)
- 3) 村田茂昭「*H. Yilmaz* の1958年理論の再検討(Ⅲ)—*Ricci* のテンソルと曲率—」札幌大学女子短期大学部紀要34号 pp3~18 平成11年9月(1999.9)
- 4) *H. Yilmaz* "New Approach to General Relativity" *Physics. Rev.* Vol, 111, No.5, Sept, 1958
- 5) 村田茂昭「*H. Yilmaz* の1958年理論の正常 Riemann 空間への書き直し(Ⅰ)」札幌大学女子短期大学部紀要25号 pp43~65 平成7年3月(1995.3)

## 付録 I Yilmaz時空の affine 接続係数

座標系は

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x, y, z) \quad (\text{A1.1})$$

であるとし、共変基本テンソルを本文と同様に下記のごとくとする。

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{-2f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2f} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

反変基本テンソルは

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{2f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2f} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.3})$$

affine 接続係数は

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left( \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (\text{A1.4})$$

である。このうちゼロでない成分は

$$i=0, k=0$$

$$\Gamma_{00}^0 = g^{00} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) = -e^{2f} \frac{1}{2} (-2f_0) (-e^{-2f}) = -f_0 \quad (\text{A1.5})$$



$i = 0, k \neq 0$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0k}^0 &= \Gamma_{k0}^0 \\ &= \mathbf{g}^{00} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{00}}{\partial x^k} \right) = -e^{2f} \frac{1}{2} (-2f_k) (-e^{-2f}) = -f_k\end{aligned}\quad (\text{A1.6})$$

$$\Gamma_{kk}^0 = -\mathbf{g}^{00} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{kk}}{\partial x^0} \right) = e^{2f} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial e^{2f}}{\partial x^0} \right) = e^{2f} \frac{1}{2} 2f_0 (e^{2f}) = e^{4f} f_0 \quad (\text{A1.7})$$

$i = k \neq 0$

$$\left. \begin{aligned}\Gamma_{00}^k &= -\mathbf{g}^{kk} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{00}}{\partial x^k} \right) = -e^{-2f} \frac{1}{2} (-2f_k) (-e^{-2f}) = -e^{-4f} f_k \\ \Gamma_{0k}^k &= \Gamma_{k0}^k = \mathbf{g}^{kk} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{kk}}{\partial x^0} \right) = e^{-2f} \frac{1}{2} 2f_0 e^{2f} = f_0 \\ \Gamma_{kk}^k &= \mathbf{g}^{kk} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{kk}}{\partial x^k} \right) = f_k\end{aligned}\right\} \quad (\text{A1.8})$$

$n \neq k$  and  $n \neq 0, k \neq 0$

$$\left. \begin{aligned}\Gamma_{nk}^k &= \Gamma_{kn}^k = \mathbf{g}^{kk} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{kk}}{\partial x^n} \right) = f_n \\ \Gamma_{nn}^k &= -\mathbf{g}^{kk} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{nn}}{\partial x^k} \right) = -f_k\end{aligned}\right\} \quad (\text{A1.9})$$

である。

なお、第1章で述べたように、上下の指標がラテン文字のときは、和を取らない。すなわち  $\Gamma_{0k}^k$  は affine 接続係数で、上の指標と下の第2指標が同じ成分であることを示す（この付録I中では、 $k$  がゼロでない条件もつけ加わっている）。

[付録I終]

## 付録II Yilmaz時空の Ricci のテンソル

Riemann のテンソルは

$$R^h{}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^h - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^h \quad (\text{A2.1})$$

本文第1章で述べたように、上下に同じギリシャ文字がある場合は、「Einstein の省略記法」のダミーの指標である。これは、その式のその項内で終わり、外部にはまったく無関係・無影響であるから、途中で書き換えることは自由である。また、ギリシャ文字が不足する場合は、このダミーの指標として、論文中で他の意味に使用する文字 ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \lambda$  etc.) も、特に断りなく使用する。

なおこのテンソルは、参考書の著者によっては、指標の定義が異なる<sup>1) 2) 3)</sup>。本論文では、この付録IIの参考文献(2)の定義に従った。

この Riemann のテンソルの定義に基づくと、Ricci のテンソルは

$$R_{ik} = R^{\mu}{}_{i\mu k} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{i\mu}^{\mu}}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} - \Gamma_{i\mu}^{\alpha} \Gamma_{k\alpha}^{\mu} \quad (\text{A2.2})$$

となる<sup>4)</sup>。

基本テンソルが  $(k, k)$  成分のみ値を持つとき、affine 接続係数は、二つ以上の指標が等しいときのみゼロでない値をとる。以下においては、affine 接続係数のこの性質を利用して効率的に計算を進める。

◎  $R_{00}$  の計算

$$R_{00} = R^{\mu}{}_{0\mu 0} = \frac{\partial \Gamma_{00}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{0\mu}^{\mu}}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} - \Gamma_{0\mu}^{\alpha} \Gamma_{0\alpha}^{\mu} \quad (\text{A2.3})$$

$R_{00}$ の第1項

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{00}^\mu}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \Gamma_{00}^m}{\partial x^m} \\
&= -f_{00} - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial e^{-4f} f_m}{\partial x^m} \\
&= -f_{00} - e^{-4f} \sum_{m=1}^3 \left( f_{mm} - 4(f_m)^2 \right) \\
&= -f_{00} - e^{-4f} (f_{11} + f_{22} + f_{33}) + 4e^{-4f} \left( (f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 \right) \quad (a)
\end{aligned}$$

$R_{00}$ の第2項

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Gamma_{0\mu}^\mu}{\partial x^0} &= -\frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \Gamma_{0m}^m}{\partial x^0} = -\frac{\partial(-f_0)}{\partial x^0} - 3\frac{\partial f_0}{\partial x^0} \\
&= f_{00} - 3f_{00} = -2f_{00} \quad (b)
\end{aligned}$$

$R_{00}$ の第3項

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\mu &= \Gamma_{00}^0 \Gamma_{\mu 0}^\mu + \sum_{n=1}^3 \Gamma_{00}^n \Gamma_{\mu n}^\mu \\
&= \Gamma_{00}^0 \left( \Gamma_{00}^0 + \sum_{m=1}^3 \Gamma_{m0}^m \right) + \sum_{n=1}^3 \Gamma_{00}^n \Gamma_{0n}^0 + \sum_{n=1}^3 \Gamma_{00}^n \left( \sum_{m=1}^3 \Gamma_{mn}^m \right) \\
&= -f_0(-f_0 + 3f_0) + \sum_{n=1}^3 (-e^{-4f} f_n)(-f_n) + \sum_{n=1}^3 (-e^{-4f} f_n) 3f_n \\
&= -2(f_0)^2 + e^{-4f} \sum_{n=1}^3 (f_n)^2 - 3e^{-4f} \sum_{k=1}^3 (f_n)^2 \\
&= -2(f_0)^2 - 2e^{-4f} \left( (f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 \right) \quad (c)
\end{aligned}$$

$R_{00}$ の第4項

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{0\mu}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^\mu &= -\Gamma_{0\mu}^0 \Gamma_{00}^\mu - \sum_{n=1}^3 \Gamma_{0\mu}^n \Gamma_{0n}^\mu \\
&= -\left( \Gamma_{00}^0 \right)^2 - \sum_{m=1}^3 \Gamma_{0m}^0 \Gamma_{00}^m - \left( \sum_{n=1}^3 \Gamma_{00}^n \Gamma_{0n}^0 \right) - \sum_{n=1}^3 \left( \sum_{m=1}^3 \Gamma_{0m}^n \Gamma_{0n}^m \right) \\
&= -(-f_0)^2 - 2 \sum_{m=1}^3 \Gamma_{0m}^0 \Gamma_{00}^m - \sum_{n=1}^3 \left( \Gamma_{01}^n \Gamma_{0n}^1 + \Gamma_{02}^n \Gamma_{0n}^2 + \Gamma_{03}^n \Gamma_{0n}^3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(f_0)^2 - 2 \sum_{m=1}^3 \Gamma_{0m}^0 \Gamma_{00}^m - \left( \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 \right) \\
&= -(f_0)^2 - 2e^{-4f} \left( (f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 \right) - 3(f_0)^2 \\
&= -4(f_0)^2 - 2e^{-4f} \left( (f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 \right) \tag{d}
\end{aligned}$$

$$\therefore R_{00} = -3f_{00} - e^{-4f} (f_{11} + f_{22} + f_{33}) - 6(f_0)^2 \tag{A2.4}$$

◎  $R_{11}$  の計算

$$R_{11} = R^{\mu}{}_{1\mu 1} = \frac{\partial \Gamma_{11}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{1\mu}^{\mu}}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} - \Gamma_{1\mu}^{\alpha} \Gamma_{1\alpha}^{\mu} \tag{A2.5}$$

$R_{11}$  の第 1 項

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{11}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \Gamma_{11}^m}{\partial x^m} \\
&= \frac{\partial (e^{4f} f_0)}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{11}^3}{\partial x^3} \\
&= e^{4f} \left( f_{00} + 4(f_0)^2 \right) + f_{11} - f_{22} - f_{33} \tag{e}
\end{aligned}$$

$R_{11}$  の第 2 項

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Gamma_{1\mu}^{\mu}}{\partial x^1} &= -\frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^1} - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \Gamma_{1m}^m}{\partial x^1} \\
&= -\frac{\partial (-f_1)}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \right) \\
&= f_{11} - 3f_{11} = -2f_{11} \tag{f}
\end{aligned}$$

$R_{11}$ の第3項

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\mu &= \Gamma_{11}^0 \Gamma_{\mu 0}^\mu + \sum_{n=1}^3 \Gamma_{11}^n \Gamma_{\mu n}^\mu \\
&= e^{4f} f_0 \left( \Gamma_{00}^0 + \sum_{m=1}^3 \Gamma_{m0}^m \right) + \sum_{n=1}^3 \Gamma_{11}^n \Gamma_{0n}^0 + \sum_{n=1}^3 \Gamma_{11}^n \left( \sum_{m=1}^3 \Gamma_{mn}^m \right) \\
&= e^{4f} f_0 \left( -f_0 + 3f_0 \right) + \left( \Gamma_{11}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{02}^0 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{03}^0 \right) \\
&\quad + \Gamma_{11}^1 \left( \sum_{m=1}^3 \Gamma_{m1}^m \right) + \Gamma_{11}^2 \left( \sum_{m=1}^3 \Gamma_{m2}^m \right) + \Gamma_{11}^3 \left( \sum_{m=1}^3 \Gamma_{m3}^m \right) \\
&= 2e^{4f} (f_0)^2 - (f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 + 3(f_1)^2 - 3(f_2)^2 - 3(f_3)^2 \\
&= 2e^{4f} (f_0)^2 + 2(f_1)^2 - 2(f_2)^2 - 2(f_3)^2 \tag{g}
\end{aligned}$$

$R_{11}$ の第4項

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{1\mu}^\alpha \Gamma_{1\alpha}^\mu &= -\Gamma_{1\mu}^0 \Gamma_{10}^\mu - \sum_{n=1}^3 \Gamma_{1\mu}^n \Gamma_{1n}^\mu \\
&= -\left( \Gamma_{10}^0 \right)^2 - \left( \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{12}^0 \Gamma_{10}^2 + \Gamma_{13}^0 \Gamma_{10}^3 \right) - \left( \Gamma_{1\mu}^1 \Gamma_{11}^\mu + \Gamma_{1\mu}^2 \Gamma_{12}^\mu + \Gamma_{1\mu}^3 \Gamma_{13}^\mu \right) \\
&= -(-f_1)^2 - (e^{4f} f_0) f_0 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \sum_{m=1}^3 \left( \Gamma_{1m}^1 \Gamma_{11}^m + \Gamma_{1m}^2 \Gamma_{12}^m + \Gamma_{1m}^3 \Gamma_{13}^m \right) \tag{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(f_1)^2 - e^{4f} (f_0)^2 - f_0 (e^{4f} f_0) \\
&\quad - \left( \left( \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{11}^3 \right) + \left( \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right) + \left( \Gamma_{11}^3 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3 \right) \right) \\
&= -(f_1)^2 - e^{4f} (f_0)^2 - f_0 (e^{4f} f_0) \\
&\quad - \left( (f_1)^2 - (f_2)^2 - (f_3)^2 - (f_2)^2 + (f_1)^2 - (f_3)^2 + (f_1)^2 \right) \\
&= -2e^{4f} (f_0)^2 - 4(f_1)^2 + 2(f_2)^2 + 2(f_3)^2 \tag{i}
\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}
R_{11} &= e^{4f} f_{00} - f_{11} - f_{22} - f_{33} \\
&\quad + 4e^{4f} (f_0)^2 - 2(f_1)^2 \tag{A2.6}
\end{aligned}$$

三つの空間座標軸は対等であるので

$$\begin{aligned} \therefore R_{22} &= e^{4f} f_{00} - f_{11} - f_{22} - f_{33} \\ &\quad + 4e^{4f} (f_0)^2 - 2(f_2)^2 \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

$$\begin{aligned} \therefore R_{33} &= e^{4f} f_{00} - f_{11} - f_{22} - f_{33} \\ &\quad + 4e^{4f} (f_0)^2 - 2(f_3)^2 \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

◎  $R_{01}$  の計算

$$R_{01} = R^{\mu}_{0\mu 1} = \frac{\partial \Gamma_{01}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{0\mu}^{\mu}}{\partial x^1} + \Gamma_{01}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} - \Gamma_{0\mu}^{\alpha} \Gamma_{1\alpha}^{\mu} \quad (\text{A2.9})$$

$R_{01}$  の第1項

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{01}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} &= \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^1} = \frac{\partial(-f_1)}{\partial x^0} + \frac{\partial f_0}{\partial x^1} = 0 \\ &\quad (\because f_{10} = f_{01}) \end{aligned} \quad (j)$$

$R_{01}$  の第2項

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Gamma_{0\mu}^{\mu}}{\partial x^1} &= -\frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^1} - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \Gamma_{0m}^m}{\partial x^1} \\ &= -\frac{\partial(-f_0)}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \\ &= f_{01} - 3f_{01} = -2f_{01} \end{aligned} \quad (k)$$

$R_{01}$ の第3項

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\mu &= \Gamma_{01}^0 \Gamma_{\mu 0}^\mu + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{\mu 1}^\mu \\
&= -f_1 \left( \Gamma_{00}^0 + \sum_{m=1}^3 \Gamma_{m0}^m \right) + f_0 \left( \Gamma_{01}^0 + \sum_{m=1}^3 \Gamma_{m1}^m \right) \\
&= -f_1 (-f_0 + 3f_0) + f_0 (-f_1 + 3f_1) = 0 \quad (l)
\end{aligned}$$

$R_{01}$ の第4項

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{0\mu}^\alpha \Gamma_{1\alpha}^\mu &= -\Gamma_{0\mu}^0 \Gamma_{10}^\mu - \sum_{n=1}^3 \Gamma_{0\mu}^n \Gamma_{1n}^\mu \\
&= -\Gamma_{00}^0 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{10}^1 - \left( \Gamma_{0\mu}^1 \Gamma_{11}^\mu + \Gamma_{0\mu}^2 \Gamma_{12}^\mu + \Gamma_{0\mu}^3 \Gamma_{13}^\mu \right) \\
&= -(-f_0)(-f_1) - (-f_1)f_0 - \left( \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{13}^3 \right) \\
&= -\left( (-e^{-4f} f_1) e^{4f} f_0 + 3f_0 f_1 \right) = -2f_0 f_1 \quad (m)
\end{aligned}$$

故に

$$R_{10} = R_{01} = -2f_0 f_1 - 2f_0 f_1 \quad (\text{A2.10})$$

三つの空間座標軸は対等であるので

$$\therefore R_{20} = R_{02} = -2f_0 f_2 - 2f_0 f_2 \quad (\text{A2.11})$$

$$\therefore R_{30} = R_{03} = -2f_0 f_3 - 2f_0 f_3 \quad (\text{A2.12})$$

◎  $R_{12}$ の計算

$$R_{12} = R_{1\mu 2}^\mu = \frac{\partial \Gamma_{12}^\mu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{1\mu}^\mu}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\mu - \Gamma_{1\mu}^\alpha \Gamma_{2\alpha}^\mu \quad (\text{A2.13})$$

$R_{12}$ の第1項

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{12}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} &= \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2} \\ &= f_{21} + f_{12} = 2f_{12} \quad (n) \\ &(\because f_{21} = f_{12})\end{aligned}$$

$R_{12}$ の第2項

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \Gamma_{1\mu}^{\mu}}{\partial x^2} &= -\frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x^2} - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \Gamma_{1m}^m}{\partial x^2} \\ &= -\frac{\partial(-f_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^2}(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\ &= f_{12} - 3f_{12} = -2f_{12} \quad (o)\end{aligned}$$

$R_{12}$ の第3項

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} &= \Gamma_{12}^1 \Gamma_{\mu 1}^{\mu} + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{\mu 2}^{\mu} \\ &= f_2 \left( \Gamma_{01}^0 + \sum_{m=1}^3 \Gamma_{m1}^m \right) + f_1 \left( \Gamma_{02}^0 + \sum_{m=1}^3 \Gamma_{m2}^m \right) \\ &= f_2 (-f_1 + 3f_1) + f_1 (-f_2 + 3f_2) = 4f_1 f_2 \quad (p)\end{aligned}$$

$R_{12}$ の第4項

$$\begin{aligned}-\Gamma_{1\mu}^{\alpha} \Gamma_{2\alpha}^{\mu} &= -\Gamma_{1\mu}^0 \Gamma_{20}^{\mu} - \sum_{n=1}^3 \Gamma_{1\mu}^n \Gamma_{2n}^{\mu} \\ &= -\Gamma_{10}^0 \Gamma_{20}^0 - \left( \Gamma_{11}^0 \Gamma_{20}^1 + \Gamma_{12}^0 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{13}^0 \Gamma_{20}^3 \right) - \left( \Gamma_{1\mu}^1 \Gamma_{21}^{\mu} + \Gamma_{1\mu}^2 \Gamma_{22}^{\mu} + \Gamma_{1\mu}^3 \Gamma_{23}^{\mu} \right) \\ &= -(-f_1)(-f_2) - \sum_{m=1}^3 \left( \Gamma_{1m}^1 \Gamma_{21}^m + \Gamma_{1m}^2 \Gamma_{22}^m + \Gamma_{1m}^3 \Gamma_{23}^m \right) \\ &= -f_1 f_2 - \left( \left( \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^2 \right) + \left( \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2 \right) + \left( \Gamma_{13}^3 \Gamma_{23}^3 \right) \right) \\ &= -f_1 f_2 - \left( 2f_1 f_2 + 2f_1 f_2 + f_1 f_2 \right) = -6f_1 f_2 \quad (q)\end{aligned}$$



故に

$$R_{12} = R_{21} = -2f_1f_2 \quad (\text{A2.14})$$

三つの空間座標軸は対等であるので

$$\therefore R_{13} = R_{31} = -2f_1f_3 \quad (\text{A2.15})$$

$$\therefore R_{23} = R_{32} = -2f_2f_3 \quad (\text{A2.16})$$

[付録Ⅱ終]

#### [付録Ⅱの参考文献]

- (1) 矢野健太郎 「リーマン幾何学入門」 p75 森北出版 1971 …なおこの文献では、*Riemann* のテンソルをリーマン・クリストッフェルのテンソルと呼んでいる。
- (2) 平川浩正 「相対論」 第2版 p80 共立出版 1986
- (3) *L.D.Landau and E.M.Lifshitz* “The Classical Theory of Field” - Fourth Revised English Edition p260 Pergamon Press 1973
- (4) 平川浩正 p81

## 付録III 定積分の計算

◎  $I_1$  の計算

(3.38) 式より

$$I_1 \equiv \rho^2 \int_0^{\infty} \frac{(z-a)dz}{\left(\rho^2 + (z-a)^2\right)^3} \quad (\text{A3.1})$$

ここで

$$u = z - a \quad (\text{A3.2})$$

とおくと

$$\begin{aligned} I_1 \equiv \frac{I_1}{\rho^2} &= \int_{-a}^{\infty} \frac{udu}{\left(\rho^2 + u^2\right)^3} = \int_{-a}^0 \frac{udu}{\left(\rho^2 + u^2\right)^3} + \int_0^{\infty} \frac{udu}{\left(\rho^2 + u^2\right)^3} \\ &= \int_a^{\infty} \frac{udu}{\left(\rho^2 + u^2\right)^3} \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

ここで

$$X = u^2 \quad (\text{A3.4})$$

とおくと

$$\therefore dX = 2udu \quad (\text{A3.5})$$

$$I_1' = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{\infty} \frac{dX}{\left(\rho^2 + X\right)^3} = -\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\left(\rho^2 + X\right)^2} \right]_{a^2}^{\infty} = \frac{1}{4 \left(\rho^2 + a^2\right)^2} \quad (\text{A3.6})$$

$$\therefore I_1 = \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{\left(\rho^2 + a^2\right)^2} \quad (\text{A3.7})$$

◎  $I_2$  の計算

(3.39) 式より

$$I_2 = 2\rho^2 \int_0^\infty z \left( \rho^2 + (z-a)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \rho^2 + (z+a)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} dz \quad (\text{A3.8})$$

$$I'_2 \equiv \frac{I_2}{2\rho^2} = \int_0^\infty z \left( z^4 + 2(\rho^2 - a^2)z^2 + (\rho^2 + a^2)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} dz \quad (\text{A3.9})$$

ここで

$$\begin{aligned} \left( \rho^2 + (z-a)^2 \right) \left( \rho^2 + (z+a)^2 \right) &= \left( \rho^2 + z^2 + a^2 - 2az \right) \left( \rho^2 + z^2 + a^2 + 2az \right) \\ &= \left( \rho^2 + z^2 + a^2 \right)^2 - 4a^2 z^2 = z^4 + 2(\rho^2 - a^2)z^2 + (\rho^2 + a^2)^2 \end{aligned} \quad (\text{A3.10})$$

である。

$$\therefore I'_2 = \int_0^\infty \frac{z dz}{\left( \sqrt{z^4 + 2(\rho^2 - a^2)z^2 + (\rho^2 + a^2)^2} \right)^3} \quad (\text{A3.11})$$

$$X = z^2 \quad (\text{A3.12})$$

と置き換えて、

$$I'_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dX}{\left( \sqrt{X^2 + 2(\rho^2 - a^2)X + (\rho^2 + a^2)^2} \right)^3} \quad (\text{A3.13})$$

岩波数学公式 I より<sup>1)</sup>

$$\int \frac{dX}{\left(\sqrt{AX^2 + BX + C}\right)^3} = \frac{2(2AX + B)}{(4AC - B^2)\sqrt{AX^2 + BX + C}} \quad (\text{A3.14})$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 2(\rho^2 - a^2) \\ C &= (\rho^2 + a^2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.15})$$

であるから

$$(4AC - B^2) = 16a^2\rho^2 \quad (\text{A3.16})$$

$$\begin{aligned} \therefore I_2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{16a^2\rho^2} \left[ \frac{2(2X + 2(\rho^2 - a^2))}{\left(\sqrt{X^2 + 2(\rho^2 - a^2)X + (\rho^2 + a^2)^2}\right)} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{16a^2\rho^2} \left( 2 - \frac{2(\rho^2 - a^2)}{(\rho^2 + a^2)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.17})$$

$$I_2 = 2\rho^2 I_2' = \frac{1}{4a^2} \left( 1 - \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + a^2} \right) \quad (\text{A3.18})$$

◎  $I_3$  の計算

この項は、 $I_1$  と実質的に同じ形である。(3.40) 式より

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv \rho^2 \int_0^\infty \frac{(z+a)dz}{\left(\rho^2 + (z+a)^2\right)^3} \\ &= \rho^2 \int_a^\infty \frac{udu}{\left(\rho^2 + u^2\right)^3} = \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{\left(\rho^2 + a^2\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{A3.19})$$

◎  $I_4$  の計算

(3.49) 式より

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^\infty \frac{r^3 dr}{\left(r^2 + a^2\right)^3} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{XdX}{\left(X + a^2\right)^3} \quad (\because X = r^2) \end{aligned} \quad (\text{A3.20})$$

ピーアス・フォスター簡約積分表より<sup>2)</sup>

$$\int \frac{XdX}{(A+BX)^3} = \frac{1}{B^2} \left[ -\frac{1}{A+BX} + \frac{A}{2(A+BX)^2} \right] \quad (\text{A3.21})$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A &= a^2 \\ B &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.22})$$

であるから

$$\begin{aligned} \therefore I_4 &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{X+a^2} + \frac{a^2}{2(X+a^2)^2} \right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{a^2} + \frac{a^2}{2a^4} \right) = \frac{1}{4a^2} \end{aligned} \quad (\text{A3.23})$$

◎  $I_5$  の計算

(3.50) 式より

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^\infty \frac{rdr}{(r^2+a^2)^3} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dX}{(X+a^2)^3} = -\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(X+a^2)^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{4a^4} \end{aligned} \quad (\text{A3.24})$$

[付録Ⅲ終]

[付録Ⅲの参考文献]

- (1) 森口・宇田川・一松 著「数学公式 I」p125 (§26第12表 m=0 n=3)
- (2) ピーアス・フォスター「簡約積分表」p6 No.33 ブレイン図書出版  
1972

英文原典

*B. O. Peirce & R. M. Foster "A Short Table of Integrals" - Fourth Edition - p6 No.33 Blaisdell Publishing Company 1956*