

DFT とフーリエ解析の関係について

(Excel97内蔵の FFT/逆 FFT ツール)

村田 茂昭

1. はじめに

今まで、漠然と、「FFT (Fast Fourier Transform …高速フーリエ変換) は、フーリエ解析を、高速で計算するためのアルゴリズムである。」と考えていた。なぜならば、コンピュータで数値計算する以上サンプル値を使用しなければならない。サンプル値は、有限の数しか使用できない。したがって、ごく自然に、「サンプル値の得られない部分は、その繰り返しであると考えて、数値計算法が考案された。したがって、積分法としては方形近似を使用したフーリエ解析を有限の項数で打ち切った場合に相当する。」と信じていたからである。故に、「得られた結果の (角周波数領域の) 上半分は標本化定理 (サンプリング定理) に違反するから、捨てるべきである。」というような主張を、述べたことがある¹⁾。解説書²⁾にも、標本化定理に言及しているものがある。

しかし、今回 Excel97に内蔵されている FFT ツールを使用し、参考書を読み、いろいろ考察をしてみた結果、それは違うのではないかとの結論に達した。

すなわち、FFT は離散的に得られるデータの離散的フーリエ変換 DFT (Discrete Fourier Transform) の高速計算アルゴリズムであり、逆 FFT は離散的逆フーリエ変換 DFT の高速計算アルゴリズムである。そして、DFT、逆 DFT の理論は、「数学的に、フーリエ解析とは異なる離散値系で閉じた理論体系」を形成している。これに、連続アナログ信号論の定理である、標本化定理 (サンプリング定理) を適用しようとすることは筋違いである。DFT/逆 DFT のアルゴリズムが人格を持っていたら、「サンプリング定理に違反するのどうのこうのと言うの

は、余計なお世話だ！」と怒るに違いない。

とはいっても、われわれは、連続アナログ信号の処理にしばしば FFT/逆 FFT を使用する。この場合、各種の注意が必要である。とくに、定量的な結果が必要なときは、これは重大な問題となる。

Excel97（もちろんに Excel2000にも）は、各種データ処理用の分析ツールが付属している。（通常のインストールの作業でも、パソコンのハードディスクに格納されるが、使用するにはアドインという操作が必要である。）その分析ツール中に、FFT/逆 FFT プログラムが入っている。

各種のデータ処理（数値計算）アプリケーションが発売されているが、中には、個人ではとうてい手が出ないほど高価なものが多い。その意味では、この、Excel に内蔵されている分析ツールは、Excel の価格の中に含まれていると言う意味で、安価であり、数値計算の大衆化時代にふさわしいものである。

しかし、その使用法はあまり詳しく解説されていないように見うけられる。とくに、本論文のような指摘は、私が最初であるかどうかは不明であるが、今まで私にこれを指摘してくれた研究者はいなかった。

2. フーリエ変換と逆フーリエ変換

FFT や逆 FFT の基礎になっているのは、言うまでもなく、数学のフーリエ (*Fourier*) 変換の理論である。フーリエ変換は、積分変換の典型であって、数学公式集に必ず登場すると言っても良いほど、ありふれた…かつ重要な…理論である。ところが、学問分野によって、定義式に表れる係数が異なる。

本論文においては、各スペクトルの振幅が問題であるので、この点を明瞭にしておかなくては議論が進まない。

数学においては、フーリエ変換と逆フーリエ変換は全く同形の積分変換なので、理論上区別は無い。私の愛用している公式集³⁾には、フー

リエ変換は次のように出ている。

$f(x)$ に演算を施したときの *Fourier* 変換

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} F(y) dy \quad (2.1a)$$

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx \quad (2.1b)$$

なお

$0 < x < \infty$ で定義された関数 $f(x)$ に対して、フーリエの余弦変換公式は

$$F_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(xy) dx \quad (2.2a)$$

フーリエ正弦変換公式は

$$F_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(xy) dx \quad (2.2b)$$

虚数の指数関数に関する *Euler* の公式は

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (2.3)$$

この式と、フーリエ変換の式 (2.1b) をみると、 $f(x)$ が、実数で偶関数であれば、そのフーリエ変換は、フーリエ余弦変換に一致する。また $f(x)$ が、実数で奇関数であれば、そのフーリエ変換は、純虚数であり、その成分（虚数単位にかけられる係数）はフーリエ正弦変換に一致することがわかる。

以上のごとくに、通常は $F(y)$ を $f(x)$ の フーリエ変換 と称しているから、一般には、(2.1b) 式をフーリエ変換、(2.1a) 式のほうを逆フーリエ変換と区別することが普通である。しかし、式を見ればわかるように数学的には、被積分関数中の虚数単位 の前の符号が反対になって

いることをのぞくと、全く同じ計算であることがわかる。「このように、係数を同じに定義すると、 $f(x)$ と $F(y)$ のノルムを同じにできるので、理論的に都合が良いから、数学や（理論）物理学ではこのように定義する。」と参考書には書いてある⁴⁾。

しかし、工学特に電気・電子工学では、周波数スペクトルと言う概念が重要であるので、通常は下記のごとくに定義する⁴⁾。

$f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ としたとき
フーリエ変換は

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.4)$$

逆フーリエ変換は

$$\begin{aligned} F(t) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \\ \therefore \nu &= \frac{\omega}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ω : 角周波数 ν : 周波数

のごとくに定義される。なお、電気・電子工学では、周波数に f と言う文字を使用することが多いが、本論文では、この文字はアナログ信号の関数に使用している。そのため、周波数を表す文字としては、（物理学で使用するが多い）ギリシャ文字の ν を採用した。

これらの定義式を、フーリエ変換の数学的定義式 (2.1a), (2.1b) と比べると、積分記号の前の係数が変わったほかに、指数関数の虚数単位の前にある符号が反対になっていることがわかる。なお、虚数単位の記号を j と記すのは、 i が電気電子工学で電流の記号に使われるからである。（ワープロソフトウェアのフォントが豊富になった現在では、電流と虚数単位のフォントを変えると良いと思うのだが、ここで

は、長年の慣習に従う。)

純粹数学の参考書を読むときや、それらから直接引用した式が書かれている場合、このふたつの定義を良く心得ないと何が何やらわからなくなる。最悪なケースでは、複数の理論家が執筆した「名著」で、何の断りも無いのに章によって定義が異なるものさえあった。とくに符号に関しては、重要であるにもかかわらず、気づきにくいので要注意である。

係数については、上記のような自由度があるが、数学的定義／工学的定義のどちらであっても、フーリエ変換したものをとくに手を加えずフーリエ逆変換した場合、誤差が無ければ、元の関数に戻らなくてはいけない（係数を勝手には決められない）。

後述のように、数値計算の場合は必ず誤差があるが、その場合、予想される近似の範囲で元に戻らなければならない。ここまでは読者に異論はないであろう。

フーリエ変換の際の積分変数 t は、時間である必要は無いが、工学で重要なケースでは、これが時間である場合が圧倒的に多い。そうすると、フーリエ変換は、実空間の事象を、角周波数空間の事象に変換する操作であり、フーリエ逆変換はその逆の操作である。たとえば、不規則なノイズを含む時系列信号を、フーリエ変換して角周波数空間に直し、フィルターをかけて（角周波数空間における操作）から、逆フーリエ変換すると、ノイズが少なくなった時系列信号が得られる。目的の信号のエネルギーが、特定の周波数領域に集中している場合は、これは非常に有効である。アナログ機器の時代は、これはすべてハードウェアで行われた。FFTとコンピュータの低価格化によって、今や、これがデジタル的に可能になった。現実のハードウェア素子で作成不可能なフィルターもこの方法であれば、実現可能である。

アナログの時代は、後述のように話は簡単であり、標本化定理に違

反すれば、高周波の信号を見失ってしまうだけであった。しかし、デジタルの時代になって事情が変わってきたにもかかわらず、多くの読者は正確な事態を把握していないのではないだろうか？

3. 離散的フーリエ変換 (DFT)

信号の系列が有限である場合を離散的フーリエ変換 (DFT: Discrete Fourier Transform) と言う。一般的には、情報は独立変数の等間隔刻みで、得られている。

離散信号系列から DFT を計算する効率的アルゴリズムが高速フーリエ変換 (FFT: Fast Fourier Transform) である。独立変数は、時系列データでは時間であるが、CT スキャン (いわゆる断層写真のコンピュータ処理) の場合は、もともとは空間座標である (データ取りこみのとき、時系列データとはなるが)。

以後の説明では、わかりやすさのため、時系列データを例にとって話を進める。

3.1 離散的フーリエ変換 (DFT)

アナログ信号 $f(t)$ を、サンプリングした N 個の離散的信号系列 f_k が与えられたとき、次式に示す N 個の有限数列 F_k を、 $f(t)$ の離散的フーリエ変換という。

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-kn} \quad (3.1)$$

ここで

$$f_n = f(n\Delta) \quad (3.2)$$

Δ : サンプリング間隔

であるが、説明を簡単にするため、サンプリング間隔を 1 に規格化しよう。

$$\because f_n = f(n) \quad (3.3)$$

サンプリング間隔が、1と異なるときは、それにあわせて周波数（角周波数）の尺度を変更すると良い。単に離散的データをDFTし、角周波数領域で、フィルタリング等の操作を行ってから、逆DFTで元の離散値に戻すだけであれば、角周波数領域は全くの架空のもので良いから、このサンプリング間隔の規格化は、妥当なものである。

また

$$W_N = e^{j2\pi/N} \quad (3.4)$$

である。

上式は、1のN乗根をあらわす。

$$\begin{aligned} (W_N)^N &= (e^{j2\pi/N})^N \\ &= e^{j2\pi} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

また、 k は、角周波数空間で、次の離散的値を取る変数である。

$$k = 0 \sim N - 1 \quad (3.6)$$

これは、本来は角周波数領域の独立変数の値に関係する量なのであるが、本論文の第4章のごとくに考え方を変えると、後述のように高調波の次数に相当する（ゼロは直流分）。

また、この信号の継続時間は

$$T = N \quad (3.7)$$

である。なお、参考文献(4)とは、文字の使い方が異なることに注意せよ。また、同書では、サンプリング間隔を1に規格化したことを明確に書いていないので、非常にわかりにくくなっている。

(3.7) 式より、もしも、この信号が時間領域で、周期 $T(=N)$ の周期関数であるとすれば、その基本波の周波数 ν_1 、角周波数 ω_1 は、

$$\nu_1 = \frac{1}{N} \quad (3.8a)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{N} \quad (3.8b)$$

である。

参考文献(4)の説明では、(3.1)式を導くにあたって、 $f(t)$ を、サンプリングしてデルタ関数列とし、そのフーリエ変換から出発する。

この方法は、数学的に正統的なのであろうが、デルタ関数のフーリエ変換が、角周波数領域で連続関数であることを考えると、線スペクトル（角周波数領域で、デルタ関数列となる）まで矛盾なく行き着くためには膨大な説明を要する。（デルタ関数の簡単な紹介は、本稿の付録「デルタ関数」にある）。

本論文では、数学的証明は参考書に任せ、第4章において離散的フーリエ解析（Discrete Fourier Analysis）を定義して、その比較によって(3.1)式および、後述の逆DFTの式の説明を試みる。

3.2 離散的逆フーリエ変換（IDFT：Inverse DFT）

IDFTの定義式の解説は、次の式からはじまる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W_N^{km} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(\sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-kn} \right) W_N^{km} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-k(n-m)} \\ &= N f_n \end{aligned} \quad (3.9)$$

ただし、この計算においては

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} = \begin{cases} N, & (n=m) \\ 0, & (n \neq m) \end{cases} \quad (3.10)$$

を使用している。

これは、電気回路理論の平衡型多相交流の高調波解析の分野で見られる式と同形であり、(3.4)、(3.5)式より容易に導くことができる。

$$\therefore f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W_N^{kn} \quad (3.11)$$

これらの式を計算することは、さほど困難なことではないが、これが逆フーリエ変換に対応するという説明が、わかりにくい。

巷間言われているように、 $f(t)$ を、周期関数とみなして計算をすすめると、角周波数領域のデルタ関数が出現しなければならない。そのフーリエ逆変換として、連続的時間関数 $f(t)$ が得られて、そのサンプル時点での値が f_k とでもなってくれれば完璧であるのだが。

4. 離散的フーリエ解析と離散的逆フーリエ解析

4.1 離散的フーリエ解析 (DFA: Discrete Fourier Analysis)

参考文献(2)の説明では、(3.1)式を導くにあたって、 $f(t)$ をサンプリングしてデルタ関数列とし、そのフーリエ変換から出発する。

この方法は、数学的に正統的なのであろうが、デルタ関数のフーリエ変換が、角周波数領域で連続関数であることを考えると、線スペクトル(角周波数領域で、デルタ関数列となる)まで矛盾なく行き着くためには膨大な説明を要する。

以下においては、証明ではなくて説明と考えて欲しい。

ここで、 $f(t)$ が、時間領域で周期 N の周期関数であると見なそう。(観測時間領域外でも、無限に繰り返すと考える。) A_k を、 $f(t)$ を区間

$0 \leq t \leq N$ でフーリエ変換した場合の各成分の複素振幅としよう。

一般の N について議論を進めてもそう難しくはないが、煩雑であるので、特定の比較的小さい N で解説しよう。この段階では、FFTの解説ではなく、DFA (DFT)の話であるので、 N についてはとくに制限はない。 N は、3以上であれば、一般的議論が成り立つ。実は、これは電気回路理論の多相交流理論に現れる式である。この場合、3相交流で一般的な議論が可能なのは、電気工学系の読者であれば、聞いた覚えがあるであろう。 N が小さいほど、説明は簡単であるが、 N が小さいと、一般の場合を想像するのにかえって困難であるし、迫真性が著しく薄れるので4としよう。

$f(t)$ を次の式で表わすこととする。

$$f(t) = \sum_{k=0}^3 A_k e^{kj\omega_1 t} \quad (4.1)$$

*Euler*の公式(2.3)式を見ると、これは、フーリエ展開を第3高調波で打ちきった場合に相当する。 $f(t)$ が、実数であるとする、 A_k の虚数部が正弦関数の部分を担当することは自明であろう。

題意より、 $f(t)$ の値は、4個のサンプル値しかない。これを、4個の複素指数の線形結合で、無理やり表わしてしまおうという算段である。(実は、この段階で標本化定理に違反している。それは数学というよりは、物理学の問題である。この場合、物理学としては、 $f(t)$ は、もともと実数である。「本来、複素数のものが、たまたま虚数部がゼロのデータが観測された」のではないはずである。)

なお、時間領域におけるサンプル間隔は、1に規格化されていることを、忘れてはいけない。

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= A_0 e^{-0 \times j \omega_1 \times 0} + A_1 e^{-1 \times j \omega_1 \times 0} + A_2 e^{-2 \times j \omega_1 \times 0} + A_3 e^{-3 \times j \omega_1 \times 0} \\ f_1 &= A_0 e^{-0 \times j \omega_1 \times 1} + A_1 e^{-1 \times j \omega_1 \times 1} + A_2 e^{-2 \times j \omega_1 \times 1} + A_3 e^{-3 \times j \omega_1 \times 1} \\ f_2 &= A_0 e^{-0 \times j \omega_1 \times 2} + A_1 e^{-1 \times j \omega_1 \times 2} + A_2 e^{-2 \times j \omega_1 \times 2} + A_3 e^{-3 \times j \omega_1 \times 2} \\ f_3 &= A_0 e^{-0 \times j \omega_1 \times 3} + A_1 e^{-1 \times j \omega_1 \times 3} + A_2 e^{-2 \times j \omega_1 \times 3} + A_3 e^{-3 \times j \omega_1 \times 3} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

これを、行列の形で表わすと

$$\begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & W_N^{-3} \\ W_N^0 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & W_N^{-6} \\ W_N^0 & W_N^{-3} & W_N^{-6} & W_N^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

ここで、(3.4) 式を書き直す。

$$\begin{aligned} W_N &= e^{j2\pi/N} \\ &\equiv e^{j\omega_1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

where $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$

ω_1 は、フーリエ解析の際の基本波の角周波数に相当する。
式の簡略化のため下記の置き換えを行う。

$$w \equiv W_N = e^{j\omega_1} \quad (4.5)$$

(4.3) 式を、あらためて書き直すと

$$\begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^{-1} & w^{-2} & w^{-3} \\ w^0 & w^{-2} & w^{-4} & w^{-6} \\ w^0 & w^{-3} & w^{-6} & w^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

なお

$$w^0 = 1 \quad (4.7)$$

であるから、この連立方程式の係数は、非常に簡単になる。

$$\therefore \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & w^{-3} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & w^{-6} \\ 1 & w^{-3} & w^{-6} & w^{-9} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

このような形の式は、以前に扱ったことがある⁵⁾⁶⁾。

(3.4), (3.5) 式を考察すれば

$$w^4 = 1 \quad (4.9a)$$

一般の場合でも

$$w^N = 1 \quad (4.9b)$$

であるから、視察によってこの逆行列はただちに書き下すことができる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & w^{-3} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & w^{-6} \\ 1 & w^{-3} & w^{-6} & w^{-9} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

一般の場合の係数は $1/N$ である。

この式が正しいことを確かめるには、行列の乗算を実行してみると良い。

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & w^{-3} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & w^{-6} \\ 1 & w^{-3} & w^{-6} & w^{-9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

(4.6) より

$$A_0 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 f_n \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 f_n W_4^{-n} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 f_n e^{-jn\omega_1} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \left\{ f_n \cos(n\omega_1) - j f_n \sin(n\omega_1) \right\} \end{aligned} \quad (4.13a)$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \left\{ f_n \cos(2n\omega_1) - j f_n \sin(2n\omega_1) \right\} \quad (4.13b)$$

$$A_3 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \left\{ f_n \cos(3n\omega_1) - j f_n \sin(3n\omega_1) \right\} \quad (4.13c)$$

これらの式は、確かにフーリエ解析の方形近似数値積分の形をしている。しかし、良く見ると、直流分 (A_0) と交流分 ($A_k, k \neq 0$) の係数が同じ1/4なのは変である。

フーリエ解析との比較は次節で述べることとして、解析を進める。以上の式をまとめると

$k=0 \sim 3$
について

$$A_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 f_n W_4^{-kn} \quad (4.14)$$

一般の場合は

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-kn} \quad (4.15)$$

(3.1) をみると、あきらかに

$$A_k = \frac{1}{N} F_k \quad (4.16)$$

係数 $1/N$ の相違は、そうあるべき姿である。なぜならば
逆離散フーリエ解析は、 $N=3$ の場合

$$f(t) = \sum_{k=0}^3 A_k e^{kj\omega_1 t} \quad (4.1) \text{ (再掲)}$$

これを、一般の場合で、かつ離散的時間の関数値に書き直すと

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} A_k W_N^{kn} \quad (4.17)$$

であるのに対して、逆DFTは、

$$\therefore f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W_N^{kn} \quad (3.11) \text{ (再掲)}$$

である。ここで、逆DFTの方に係数 $1/N$ が現れるから、(4.15)には $1/N$ が現れ、(3.1)には現れないようになっていないと、つじつまが合わない。

これは、単にフーリエ解析とフーリエ変換の計算式の相違…すなわち、前者では、積分区間の長さ（周期）で割る操作が入るが、後者はそれが無い…の現れに過ぎない。

この節の結論は、「私の定義したDFA（離散的フーリエ解析）／逆DFAは、計算途中のスペクトルの振幅にあたる項の係数の違いをのぞくとDFT/逆DFTと等価なアルゴリズムである。」ということである。

4.2 フーリエ解析との比較

フーリエ解析においては、周期 T の周期関数について

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\omega_1 t) \quad (4.18)$$

ここで、基本波の角周波数 ω_1 は、

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (4.19)$$

である。フーリエ解析では連続信号を扱っているのであるが、前節と同様に、サンプル数を N 、サンプリング間隔を 1 に規格化した場合に話を合わせると

$$T = N \quad (4.20)$$

より

$$\therefore \omega_1 = \frac{2\pi}{N} \quad (4.21)$$

簡単な計算により

$$a_0 = \frac{1}{N} \int_0^N f(t) dt \quad (4.22)$$

$$\left. \begin{aligned} m \neq 0, n \neq 0 \\ a_n = \frac{2}{N} \int_0^N f(t) \cos(n \omega_1 t) dt \\ b_m = \frac{2}{N} \int_0^N f(t) \sin(m \omega_1 t) dt \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

これらの積分を、方形近似の数値積分法で計算すれば

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \\ &= \frac{1}{N} F_0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
 n \neq 0 \\
 a_n &= \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \cos(n l \omega_1) \\
 &= \frac{2}{N} \operatorname{Re} \{ F_n \} = 2 \operatorname{Re} \{ A_n \}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

ここで、 $\operatorname{Re}\{ \}$ は、複素数の実数部を示す。

また

$$\begin{aligned}
 m \neq 0 \\
 b_m &= \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \sin(m l \omega_1) \\
 &= -\frac{2}{N} \operatorname{Im} \{ F_m \} = -2 \operatorname{Im} \{ A_m \}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

ここで、 $\operatorname{Im}\{ \}$ は、複素数の虚数部を示す。

故に

$$\left. \begin{aligned}
 \therefore \operatorname{Re} \{ A_0 \} &= \frac{1}{N} \operatorname{Re} \{ F_0 \} = a_0 \\
 \therefore \operatorname{Re} \{ A_k \} &= \frac{1}{N} \operatorname{Re} \{ F_k \} = \frac{1}{2} a_k \quad (k \neq 0) \\
 \therefore \operatorname{Im} \{ A_k \} &= \frac{1}{N} \operatorname{Im} \{ F_k \} = -\frac{1}{2} b_k \quad (k \neq 0)
 \end{aligned} \right\} \tag{4.27}$$

A_k , a_k , b_k は、いずれも周波数領域の振幅に対応する量である。同じ概念なのに、直流分と交流分に1/2倍の係数の違いが存在することは、大問題である。

現実には、サンプル値の数を無限大にはできないので、数値計算により近似値しか得られないことは、誰でも了解済みのことであろう。

しかし、ここに現れていることは、方形近似数値積分に基づくフーリエ解析と、DFA（DFTをフーリエ解析ふう書き換えたもの）が理論的に等価ではないことなのである。

これは、数学が間違っているのだろうか？ そんなことはあり得ない。その議論をする前に、まず、ありふれた例題で、DFTを実行して見よう。（次章）

そうしてみると、現実には、意外な事態となっている。フーリエ級数展開とみなした場合には、理論上の1/2の係数違いのほかに、係数にかなりの誤差があり、また、標本化定理から言うと排除すべき数値計算上の巨大な幻影が混入しているにもかかわらず、FFTによって得られた値を、逆FFTにかけるとほとんどきっかりと元の値に戻る。

次の章において、実際に数値計算を実行し、この事情につき考察する。

5. FFT/逆FFTの試行

前章で述べたDFTの理論に基づき数値計算が可能であるが、この計算の中には同じパターンがたくさん含まれる。途中結果を上手に利用し、計算の重複を省いて計算量を飛躍的に減らす方法が、FFTである。基数2で $N=4096$ のケースで、計算量が682分の1になるという試算もある⁷⁾。これは、前章の平衡多相交流型係数行列演算の数値計算を高速で実行する方法と言える。一般にコンピュータの演算レジスタの長さが有限であるための桁落ち誤差は計算回数にほぼ比例すると考えられるから、FFTは計算誤差を減らすためにも、有効である。

FFTには、各種あるが、Excel97に内蔵されているものは、基数2のFFTアルゴリズムと推定される。（計算の途中で、データの数を誤ると「データの数が2の偶数乗で無ければならない。」という趣旨の警告メッセージが出る。これは、基数が4であることを示唆するものと考えられるが、実際にExcel97に内蔵されているのは、基数2のFFTと

推定される。そうでなければ、 $N=32$ の例題ができるわけがない。基数4のFFTを企画していたが、途中で計画を変更したのではないかと思われる。なお、Excel2000については、まだ確認していない。）

この高速化のための数値解析の理論についての解説は省略する。詳しくは、参考書を参考されたい⁸⁾。

5.1 Excel97内蔵のFFT/逆FFTツールの試用

本来FFTは、データ数が非常に多いときに有効なのであるが、本論文の目的は、前章までで述べた、問題点を検証することにある。そこで、データ数(N)を32とする。例題は、参考文献(1)の、方形波を取り上げる。なお、これでは、余弦の項がないので位相をずらした方形波を追加した。

第1図のごとき方形波をこのツールに入力しFFTと逆FFT(IFFT)を計算した結果を第1表に掲げる。なお、参考文献(1)とは異なり、この方形波は直流分(定数項)を含むように選んだ。このツールには、サンプリング間隔のデータを要求しないので、そもそもサンプリング間隔は1に規格化しているものと考えられる。入力データは実数またはExcelの複素数タイプであれば良い。

データの数 N は、(エラーメッセージが基数4のFFTを示唆しているのかかわらず)基数2のFFTであるので

$$N = 2^n \quad (n > 1 : \text{integer}) \quad (5.1)$$

である。これは、DFTの理論ではなく、FFTの理論による制限である⁸⁾。基数は、2に限らないが、Excel97の場合は2である。

本論文では、上述のごとくに

$$N = 32 = 2^5 \quad (5.2)$$

とした。

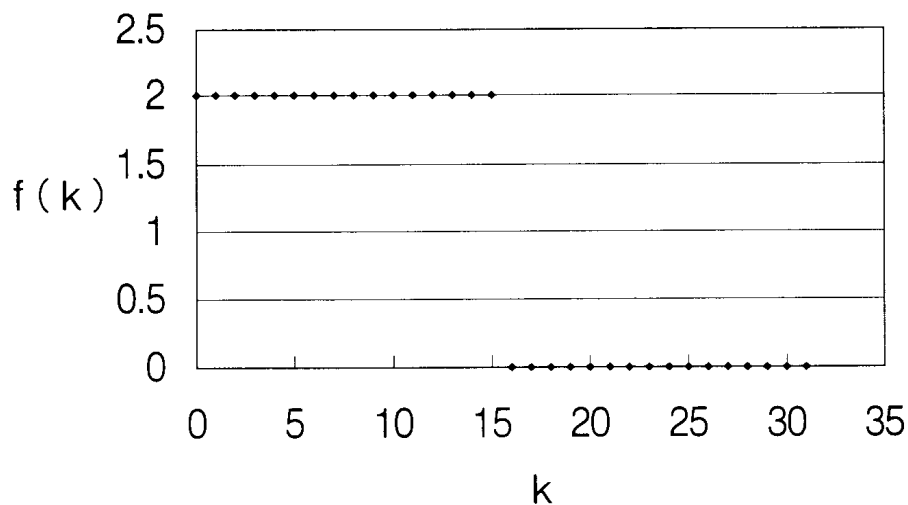
第1表の f_k の列が入力データである。この表の k の列は見やすさのために付け加えたのであるが、あとで b_k の理論値を出すために転用した。

第1表 方形波1

N=32

k	f_k	F_k	$\text{Re}(F_k)/32$	$-\text{Im}(F_k)/32$	$-\text{Im}(F_k)/16$	b_k (理論値)	IFFT	$\text{Re}(\text{IFFT})$	誤差
0	2	32	1.000	0.000	0.0000		2	2.0E+00	0.0E+00
1	2	1.9999999999999998-20.3063407752177i	0.062	0.635	1.2691	1.2732	2	2.0E+00	0.0E+00
2	2	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	2	2.0E+00	0.0E+00
3	2	1.9999999999999999-6.59311641787664i	0.062	0.206	0.4121	0.6366	2	2.0E+00	0.0E+00
4	2	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	2	2.0E+00	0.0E+00
5	2	1.9999999999999999-3.74173682357878i	0.062	0.117	0.2339	0.3183	2	2.0E+00	0.0E+00
6	2	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	2	2.0E+00	0.0E+00
7	2	1.9999999999999999-2.43700705117595i	0.062	0.076	0.1523	0.2122	2	2.0E+00	0.0E+00
8	2	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	2	2.0E+00	0.0E+00
9	2	2-1.64135758165732i	0.063	0.051	0.1026	0.1592	2	2.0E+00	0.0E+00
10	2	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	2	2.0E+00	0.0E+00
11	2	2-1.06902227190159i	0.063	0.033	0.0668	0.1273	2	2.0E+00	0.0E+00
12	2	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	2	2.0E+00	0.0E+00
13	2	2-0.606693367214687i	0.063	0.019	0.0379	0.1061	2	2.0E+00	0.0E+00
14	2	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	2	2.0E+00	0.0E+00
15	2	1.9999999999999999-0.196982806714331i	0.062	0.006	0.0123	0.0909	2	2.0E+00	0.0E+00
16	0	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0	0.0E+00	0.0E+00
17	0	2+0.196982806714326i	0.063	-0.006	-0.0123	0.0796	0	0.0E+00	0.0E+00
18	0	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0	0.0E+00	0.0E+00
19	0	2+0.606693367214681i	0.063	-0.019	-0.0379	0.0707	0	0.0E+00	0.0E+00
20	0	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0	0.0E+00	0.0E+00
21	0	2+1.06902227190158i	0.063	-0.033	-0.0668	0.0637	0	0.0E+00	0.0E+00
22	0	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0	0.0E+00	0.0E+00
23	0	2+1.64135758165731i	0.063	-0.051	-0.1026	0.0579	0	0.0E+00	0.0E+00
24	0	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0	0.0E+00	0.0E+00
25	0	2+2.43700705117595i	0.063	-0.076	-0.1523	0.0531	0	0.0E+00	0.0E+00
26	0	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0	0.0E+00	0.0E+00
27	0	2.0000000000000001+3.74173682357877i	0.063	-0.117	-0.2339	0.0490	0	0.0E+00	0.0E+00
28	0	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0	0.0E+00	0.0E+00
29	0	2.0000000000000001+6.59311641787664i	0.063	-0.206	-0.4121	0.0455	0	0.0E+00	0.0E+00
30	0	0	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0	0.0E+00	0.0E+00
31	0	2.0000000000000005+20.3063407752177i	0.063	-0.635	-1.2691	0.0424	0	0.0E+00	0.0E+00

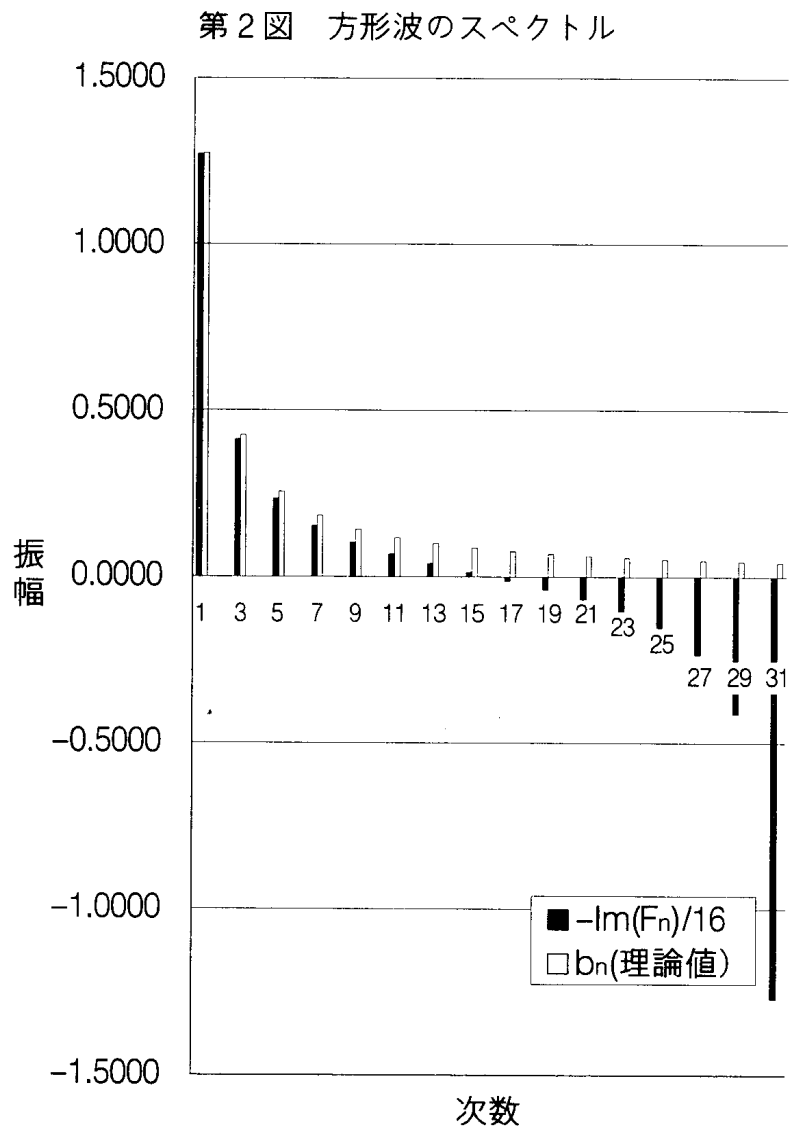
第1図 方形波1



(はじめの k は時刻であるが、 b の下付き添え字は高調波の次数である。FFT 逆FFTでは、時間領域の変数と角周波数領域の変数が同じ表に現れるので、注意が必要である。)

このツールのFFTの出力は、第1表では、 F_k の列にある。このように、Excelの複素数タイプで出力される。このままでは、計算できないので、実数部 ($\text{Re}()$) と虚数部 ($\text{Im}()$) に変換している。

フーリエ解析とみなした場合、高周波側に前論文¹⁾と同じ数値計算上の幻影が出ている。これを第2図に示す。すなわち連続アナログ信号のスペクトルとみなした場合は、標本化定理に違反する部分は捨て



なければならない。すなわち、上側半分は数値計算上の幻影である。

この幻影が現れる理由は、前論文で述べたが、これを再び書くと

例えばこの $N = 32$ の例では、各データが与えられている時刻 ($t = k \cdots$ 整数) で

$$\begin{aligned}\sin(31\omega_1 t) &= \sin(32\omega_1 t - \omega_1 t) \\ &= \sin(2\pi k - \omega_1 k) \\ &= -\sin(\omega_1 t)\end{aligned}\quad (5.3)$$

ここで、

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{32}\quad (5.4)$$

である。一般に

$$\begin{aligned}\sin((N-l)\omega_1 t) &= -\sin(l\omega_1 t) \\ &\text{where } l : \text{integer}\end{aligned}\quad (5.5)$$

この方形波 1 では、余弦関数の項は理論上ないが、第 1 表には数値計算の誤差として現れている。(FFT の結果の実数部 $\cdots \text{Re}(F_k)$)

余弦関数の方は、簡単な計算により

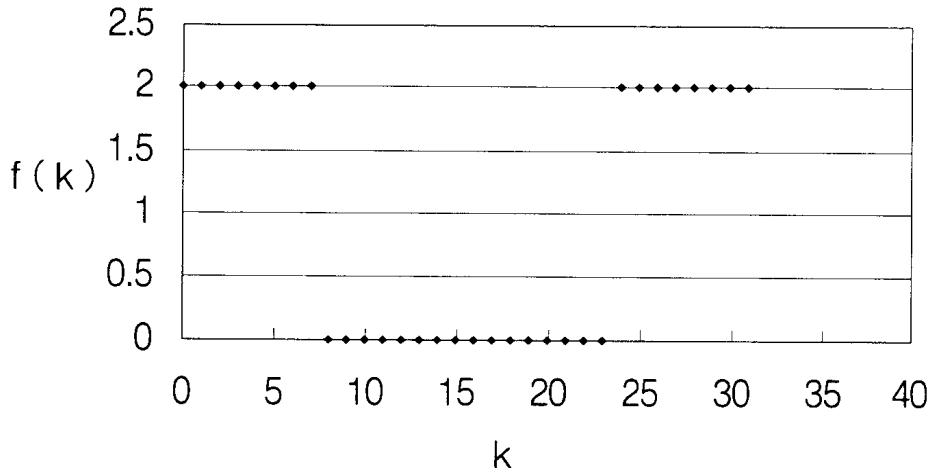
$$\begin{aligned}\cos((N-l)\omega_1 t) &= \cos(l\omega_1 t) \\ &\text{where } l : \text{integer}\end{aligned}\quad (5.6)$$

である。

これを確かめるために、方形波 2 (第 3 図) についても、FFT および逆 FFT (IFFT) を計算した。これを第 2 表に掲げる。

前章で指摘したように DFT、したがってその 1 種である FFT においては、フーリエ解析のスペクトルの振幅にあたる項が、フーリエ解析

第3図 方形波2



第2表 方形波2

N=32

k	f_k	F_k	IFFT	Re(IFFT)	誤差
0	2	32	2	2.00E+0	0.00E+0
1	2	20.3063407752177+1.99999999999998i	2	2.00E+0	0.00E+0
2	2	0	2	2.00E+0	0.00E+0
3	2	-6.59311641787663-1.99999999999999i	2	2.00E+0	0.00E+0
4	2	0	2	2.00E+0	0.00E+0
5	2	3.74173682357878+2i	2	2.00E+0	0.00E+0
6	2	0	2	2.00E+0	0.00E+0
7	2	-2.43700705117595-1.99999999999999i	2	2.00E+0	0.00E+0
8	0	0	0	0.00E+0	0.00E+0
9	0	1.64135758165732+2i	0	0.00E+0	0.00E+0
10	0	0	0	0.00E+0	0.00E+0
11	0	-1.06902227190158-1.99999999999999i	0	0.00E+0	0.00E+0
12	0	0	0	0.00E+0	0.00E+0
13	0	0.606693367214687+2i	0	0.00E+0	0.00E+0
14	0	0	0	0.00E+0	0.00E+0
15	0	-0.196982806714331-1.99999999999999i	0	0.00E+0	0.00E+0
16	0	0	0	0.00E+0	0.00E+0
17	0	-0.196982806714328+2i	0	0.00E+0	0.00E+0
18	0	0	0	0.00E+0	0.00E+0
19	0	0.606693367214681-2i	0	0.00E+0	0.00E+0
20	0	0	0	0.00E+0	0.00E+0
21	0	-1.06902227190158+2i	0	0.00E+0	0.00E+0
22	0	0	0	0.00E+0	0.00E+0
23	0	1.64135758165731-2i	0	0.00E+0	0.00E+0
24	2	0	2	2.00E+0	0.00E+0
25	2	-2.43700705117595+2i	2	2.00E+0	0.00E+0
26	2	0	2	2.00E+0	0.00E+0
27	2	3.74173682357877-2i	2	2.00E+0	0.00E+0
28	2	0	2	2.00E+0	0.00E+0
29	2	-6.59311641787665+2.00000000000001i	2	2.00E+0	0.00E+0
30	2	0	2	2.00E+0	0.00E+0
31	2	20.3063407752177-2.00000000000005i	2	2.00E+0	0.00E+0

の理路値の半分になってしまう。

たとえば、第1表では、 $\text{Re}(F_k)/32$ の最初の行 ($k=0$) が、 a_0 にあたるが、これは全く正しい。しかし、この例の次の行からは、 k が奇数に限って、 b_k が値を持つが、その理論値は

$$b_k = \frac{4}{k\pi} \quad (k: \text{odd integer}) \quad (5.7)$$

である。第1表を見ると、 F_k の虚数部に負号をつけ32で割ったもの ($-\text{Im}(F_k)/32$) が、 b_k (理論値) のおよそ半分であることがわかる。そして、これを2倍して見ても標本化定理に違反しない低周波側でさえ、かなりの誤差があるにもかかわらず、 F_k を逆FFTした結果 (IFFT) は、この表では、完全にもとのサンプル値に戻ることがわかる。(これは、Excelが数値計算結果を、最終桁で丸めているために、誤差が見えないのであろう。) これは、前章の式を良く見ると、FFTは、サンプル値のベクトル (列行列) に、特殊な形の行列を乗じたものであり、逆FFTは、上述の結果にその行列の逆行列を乗じたものである。この形の行列の逆行列は解析的に判明しているから、存在する誤差は、単に行列の2回の数値計算 (乗算) によるものだけである。そして、それは非常に小さいことがわかった。(第1表および第2表の誤差の列は、最初の入力データとそれをFFT→逆FFTした結果との差である。前章の解析によれば、この誤差は、原理的にサンプル点の数 (N) に、無関係である。なお、これらの表では、差を取る前に念のため、逆FFT (IFFT) で得られた結果の複素数の実数部分を取り出している。… $\text{Re}(\text{IFFT})$)

第2表によれば、時間関数に余弦の項しかないケースでも同様なことが確認できる。

フーリエ解析においては、各成分の計算は、三角関数の直交性により独立である。そして標本化定理に違反する高周波部分は、たまたま高周波がサンプル点で、(5.5)、(5.6) となるために、数値積分計算が

誤った係数をもたらしたのである。

しかし、DFTの理論から言うと、サンプル時刻以外のデータは、本来存在しない。そして、例えば、 $\sin(\omega_0 t)$ と $-\sin\{(N-1)\omega_0 t\}$ とは、サンプル時刻で同じ値を取る関数である以上は、両者は全く対等である。したがって、DFT (FFT) のアルゴリズムは入力された数値を、両者に平等に分配する。(単なる行列演算であるから当然である。) そうしなくては、理論的に間違いになる。「結果の高周波側半分は、標本化定理に違反するから間違いだ。」と言ったら、DFTのアルゴリズムが、(もし人格を持っておれば) 怒るであろうと述べたのは、こういう事情である。DFTは、離散値を扱う数学理論であり、その定義されていない時刻で起こることは、関知しない。

この問題は、ユーザー側が問題に応じて、対応しなければならない。

本来サンプル値で閉じている問題であれば、DFT/FFTの計算はそのままで良い。しかし、何らかの意味で、本来連続信号であるものを飛び飛びの値しかえられなかった場合(途中の値の近似値を求める必要がある場合)はつぎの操作をすべきである。

1. 直流分については、前章の A_0 が、そのまま近似値となる。フーリエ解析の振幅と、DFT (FFT) の結果との関係は

$$a_0 = \frac{1}{N} \operatorname{Re}(F_0) = A_0 \quad (5.8)$$

サンプル値が実数ならば、 F_0 の虚数部はゼロのはずである。

2. 交流分の各成分の振幅は、数値的幻影に分けられていた分を、本来の成分に戻さなければならない。

$1 \leq n < \frac{N}{2}$ について

$$a_n = \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left(F_n + F_{N-n} \right) \quad (5.9a)$$

$$b_n = -\frac{1}{N} \operatorname{Im} \left(F_n - F_{N-n} \right) \quad (5.9b)$$

(5.9a) 式の括弧の中が和であり、(5.9b) 式の括弧の中が差になる理由は、

DFT の理論上サンプル時刻で対等な関数は

$$\left. \begin{array}{l} \cos(n\omega_1 t) \quad \text{と} \quad \cos((N-n)\omega_1 t) \\ \sin(n\omega_1 t) \quad \text{と} \quad -\sin((N-n)\omega_1 t) \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

であるからである。DFT のアルゴリズムが正しい限り、逆配分は (5.9a)、(5.9b) 式のようにならねばならない。

なお、第 1 表、第 2 表をよくみると、この例題に限って言えばこの修正はまことに好都合である。本来存在せず数値計算上の誤差として出てきた成分がほぼ完全に打ち消しあうからである。

$n = N/2$ の成分だけが取り残されるが、これに関しては、 $n = 0$ と対になれるかどうか検討を要する。

$$\begin{aligned} n = \frac{N}{2}, \quad t = k(\text{integer}) \\ \sin(n\omega_1 t) &= \sin\left(\frac{N}{2} \frac{2\pi}{N} k\right) \\ &= \sin(k\pi) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \cos(n\omega_1 t) &= \cos(k\pi) \\ &= 1 \quad (k : \text{even integer}) \\ &= -1 \quad (k : \text{odd integer}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

したがってこの成分は直流分とは対等ではない。

この成分が隣合うふたつのデータに与える寄与は、符号が反対である。逆にいうと、この成分は、DFT アルゴリズムに非常に小さく評価されるはずである。

実際に上記のふたつの表では、いずれもこの成分はゼロである。標本化定理にも違犯している（すれすれであるが、標本化定理の式に等号はあってはいけない¹⁾。）ので、この成分 ($F_{N/2}$) は捨てるべきである。

6. まとめ

Excel97の付属FFTツールを検討している内に、有用な結果を得ることができた。標本化定理で、「サンプリング周波数の2倍以上の周波数成分の情報は失われる。」ことは、了解していたが、情報が失われるという意味を正確には把握していなかった。

失われる→ゼロになる または ゼロに近いでたらめな値になる

と漠然と信じていたのが実情である。

実際には、系に存在することがありえない高周波成分の振幅が、存在する（普通の）成分の振幅に強い相関を持つ値に化けて算出される可能性を無視していた。アナログ機器の時代は、誰も、サンプリングしたデータをハイパスフィルタにかけようなどとは考えなかった。ハードウェアを知っていたらそんなことは常識あるエンジニアは実行しない。だから、サンプリングした値に元の系にはない、非常に高い高周波が入っていることは常識であった。

しかし、デジタルの時代になって常識がわかりにくくなった。DFT/FFTを連続系のシミュレーションに使用するときには十分に注意

する必要がある。

[完]

参考文献

- 1) 村田茂昭「標本化定理に関する一考察」『地域・情報・文化——札幌大学女子短期大学部 創立30周年記念論文集』1999 p233
- 2) 吉田 他 著『現代工学のためのフーリエ変換の計算法』現代工学社 1994 p62
- 3) 森口、宇田川、一松 著『数学公式Ⅱ』岩波書店 1957 p261
- 4) 吉田 他 p 3～p 6
- 5) 村田茂昭「Weighting Sequence より伝達関数を決定する新方法」『電子通信学会論文誌 (C)』53-C, 9 1970. 9 p671
- 6) 村田茂昭「インパルス応答にもとづく線形定数系のパラメータ決定法について」『札幌大学女子短期大学部紀要』第18号 (1991. 9 .28) p21～28
- 7) 吉田 他 p70
- 8) たとえば、Henri J. Nussbaumer 著 佐川 本間 訳『高速フーリエ変換のアルゴリズム』科学技術出版社 1989

付録 デルタ関数

デルタ関数は、いろいろな関数の極限として定義される超関数である。詳しくは、参考書を参照されたい。(たとえば、篠崎 他 現代工学のための「デルタ関数入門」 現代工学社 1986)。

さしあたり次のようなことを知っている、この論文を理解できる。

独立変数を t とおく。この t は、時間である必要はないが、時間であると考えたほうがわかりやすいであろう。

この超関数は、継続時間が無限小であるが、振幅が無限大で、時間積分値が 1 である。超関数の知識は、さしあたり不要である。

$t = a$ に存在するデルタ関数に関し

$$\int_{t=a-0}^{t+0} \delta(t-a) dt = 0 \quad (\text{A1.1})$$

デルタ関数は、関数を打ちぬくような効果を持つ。

任意の連続関数 $f(t)$ に関して

$$\int_{\lambda-a}^{\lambda+b} f(t) \delta(t-\lambda) dt = f(\lambda) \quad (\text{A1.2})$$

ただし $a, b > 0$

上式の但し書きは、積分範囲が、デルタ関数の存在する位置を含めば良いことを示す。また、 λ は、定数である必要はなく、この式自体が一種の積分変換と考えても良い。打ちぬくという言い方は、私の独創かもしれないが、「狭い隙間から関数の特定の部分のみが見える。」ことを、そう表現したのである。

上式より、ただちにデルタ関数のフーリエ変換が求められる。

$$\begin{aligned} F(\delta(t-a)) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-j\omega a} \end{aligned} \quad (\text{A1.3})$$

これは、複素数の連続関数である。角周波数空間（周波数空間と言うこともあるが、正確にはこう表記すべきである）における形は、角周波数 a （すなわち 周期= $2\pi/a$ ）の周期関数である（周波数空間では、 ω が独立変数であることに注意）。 [付録終]