H.Yilmaz の 1958 年理論の再検討（III）
―*Ricci* のテンソルと曲率―

Reexamination of *H.Yilmaz'* 1958 Theory (III) : the *Ricci* Tensor and Curvature of the Space

村田 茂昭

1．はじめに

H.Yilmaz の 1958 年理論は、いわゆる、「一般相対論の三つの検証…水星の近日点の移動、太陽の近傍をかすめる光線の屈折、重力場中の光源のスペクトルの赤色偏移」のうち、はじめの二つについて *Schwarzschild* 時空と対等であることはすでに発表した[1]。もうひとつの重力場による赤方偏移についても、基本テンソルの形からして、2次の微少量の程度の誤差で、対等であると予測できる[2]。

ここでは、それは後回しにして、*Yilmaz* の理論が、明らかに従来の理論よりすぐれている点を明らかにする。

A. Einstein の考え…それにしたがって、*K.Schwarzschild* が、数学的に厳密に解いたものが *Schwarzschild* の解なのであるが…によると、重力場のみが存在し重力源質量の無いところでは、エネルギテンソルの各成分は、すべてゼロとなる。*H. Yilmaz* は、この *A. Einstein* の考えにはとらわれず、基本テンソルの形を仮定し、エネルギテンソルの各成分は、成り行きにまかせることを考えた（そこに現れる「スカラ」が、3次元スカラではあるが4次元時空のスカラではないことは私の頭痛の種なのではあるが）。その結果、エネルギテンソルの応力の部分は、質量の無いところでも値を持つこととなった。このことは、重力源質量の無い空間で、応力を面積分することによって、万有引力の法則を導き出せる可能性を持つ。*Einstein* は、*Newton* 力学を否定するのに急で、このようなことを考え付かなかったため、古典的にはなはだオーソドックスなこの路を無視してしまった。

なお、本論文では原則として、「テンソル式に関する*Einstein*の省略記法」に従う。すなわち、テンソル式等の上下の指標に同じギリシャ文字が出現した場合、そのギリシャ文字の取る値を、座標の数だけ変化させて総和を取る。（上下に同じラテン文字があっても総和はとらない。）
すなわち

$$T^{\mu}_{\mu} \equiv \sum_{\mu=0}^{3} T^{\mu}_{\mu} \qquad \text{テンソルの縮約} \quad (1.1)$$

$$T^{k}_{k} \quad \text{：混合テンソルの上下の指標が等しい成分} \quad (1.2)$$

これら指標に使用されるギリシャ文字は、ダミーの変数であるので、その式限りで外部には関係無い。また、文字が足りなくなった場合、他の意味でよく使われるギリシャ文字（α, β, δ, ε, λ 等）も使用するが、「*Einstein* の省略記法」のダミー変数である限り、式の外部に現れる同じ文字の変数とは無関係である。

2. Yilmazの重力理論

H. Yilmaz は、何度かその理論を修正発表しているが、ここでは、私の従来の流れに従って、原論文で示された理論を取り上げる。時空は、4次元異常リーマン空間である。どの座標も対等で4次元空間の座標なのであるが、説明の便宜のため、以下において、次のような呼び方をする。4つの座標の内、3次元の空間座標にかかわる部分を、「空間部分、空間座標」等と呼び、時間に関する部分を「時間部分、時間座標」等と呼ぶ。

2.1 異常Yilmaz時空の基本テンソルとaffine接続係数

重力場の存在する時空について、*Yilmaz* の提唱した基本テンソルは、一般の直交座標系に書きなおすと

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{-2f} & & & 0 \\ & (h_1)^2 e^{2f} & & \\ & & (h_2)^2 e^{2f} & \\ 0 & & & (h_3)^2 e^{2f} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

ただし　h_k （k＝１，２，３） は、測度係数である。

ここで、f は、重力場をあらわす３次元スカラで、重力場の源の外部で枠座標系（重力場を取り払った座標系）における下記の３次元スカラ方程式の解である。

$$\nabla^2 f = 0 \qquad (2.2)$$

すでに述べたように[2)] このfが、４次元スカラとならないことが難題なのであるが、これについて本論文では深くは論じない。３次元スカラfと、３次元の *Newton* の万有引力のスカラ Φ との数値的関係は、

$$f = -\frac{\Phi}{c^2} \quad （c\text{は真空中の光速度}） \qquad (2.3)$$

である。これから、*Ricci* のテンソル、*Einstein* のテンソルを計算して行くが、一般論は煩雑であるので、３次元空間部分の座標を直角直交座標に選んで解析を進める。（テンソルの性質により、ある座標系で計算できると、良く知られた規則で、他の座標形の場合に変換できる。）

以下において簡単のために

$$\left.\begin{aligned} f_k &\equiv \frac{\partial f}{\partial x^k} \\ f_{jk} &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

とおく。

時間にかかわる座標変換を除外すれば、(2.2) 式は重力場の源がある場合に拡張できる形をしているが、難しい議論を避けるために、本論文では、重力場源の外部の場合のみを論ずる。

affine 接続係数は

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\mu}\left(\frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\mu}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\mu} \right) \qquad (2.5)$$

直角直交座標系の場合 (2.1) 式のなかにある測度係数は、すべて 1 である。(2.5) 式にしたがって、すべての affine 接続係数が計算できる。（付録 I 参照）

2.2 *Ricci* のテンソル

Riemann の（曲率）テンソルは、著者によって微妙に定義が異なるが、ここでは平川の著書に従う[3)]。

$$R^h{}_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^h_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^h_{ij} + \Gamma^\mu_{ik}\Gamma^h_{j\mu} - \Gamma^\mu_{ij}\Gamma^h_{k\mu} \qquad (2.6)$$

これより、*Ricci* のテンソルは

$$R_{ik} = R^{\nu}_{i\nu k}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\nu}_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^{k}}\Gamma^{\nu}_{i\nu} + \Gamma^{\mu}_{ik}\Gamma^{\nu}_{\nu\mu} - \Gamma^{\mu}_{i\nu}\Gamma^{\nu}_{k\mu} \qquad (2.7)$$

である。これにより、*Ricci* のテンソルのゼロでない成分を計算すると以下のようになる。

$$\therefore R_{00} = -3f_{00} - 6(f_0)^2 - \left(f_{11} + f_{22} + f_{33}\right)e^{-4f} \qquad (2.8a)$$

$$\therefore R_{11} = f_{00}e^{4f} - \left(f_{11} + f_{22} + f_{33}\right) + 4(f_0)^2 e^{4f} - 2(f_1)^2 \qquad (2.8b)$$

$$\therefore R_{22} = f_{00}e^{4f} - \left(f_{11} + f_{22} + f_{33}\right) + 4(f_0)^2 e^{4f} - 2(f_2)^2 \qquad (2.8c)$$

$$\therefore R_{33} = f_{00}e^{4f} - \left(f_{11} + f_{22} + f_{33}\right) + 4(f_0)^2 e^{4f} - 2(f_3)^2 \qquad (2.8d)$$

（付録II参照）

この時空の反変基本テンソルは、(2.1) 式を考察すれば

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{2f} & & & 0 \\ & e^{-2f} & & \\ & & e^{-2f} & \\ 0 & & & e^{-2f} \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

である。(2.9) 式の基本テンソルにしたがって、この空間の曲率 R を計算すると

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

$$\therefore R = 6f_{00}e^{2f} - 2e^{-2f}(f_{11} + f_{22} + f_{33}) + 18(f_0)^2 e^{2f} - 2\left((f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2\right)e^{-2f} \tag{2.11}$$

上式は，３次元の演算記法によれば

$$\therefore R = 6f_{00}e^{2f} - 2e^{-2f}(\nabla^2 f) + 18(f_0)^2 e^{2f} - 2\left(g_3^{\mu\nu} f_\mu f_\nu\right)e^{-2f} \tag{2.12}$$

と書くことができる。ただし、$g_3^{\mu\nu}$ は、枠座標系の３次元部分の反変基本テンソルである。これを用いると

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{g_3}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{g_3}\, g_3^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu}\right) \tag{2.13}$$

ただし、枠座標系の共変基本テンソルを $g_{3,\mu\nu}$ としたとき

$$g_3 = \det\{\mathrm{mat}\{g_{3,\mu\nu}\}\} \tag{2.14}$$

である。ここで、mat{　} は、２階のテンソルの行列を示し、det{　} は、行列式を意味する。

また、「*Einstein* の省略記法」に関するダミー変数の値（和を取る座標軸の番号）は、１から３までである。

Rの形を見ると、fが４次元スカラでありえないことは明らかである（f と R が，同時に４次元スカラであることはありえない。一方、R が４次元スカラであることは，数学上証明されている。）しかしfが、３次元スカラであっても、曲率が４次元スカラであることとは矛盾しない。

f が4次元スカラでないことは、非常に残念であるが、3次元スカラであることは、たとえば *Schwarzschild* 時空よりは *Yilmaz* 時空のほうが、解析的にはるかに取り扱いが容易であることを意味する。

3. *Einstein* の方程式

前章で、*Ricci* のテンソルと4次元時空の曲率が定まったので、*Einstein* のテンソル方程式は次のようになる。

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} + R\ g_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} T_{\mu\nu} \qquad (3.1)$$

ただし

$G_{\mu\nu}$: *Einstein* のテンソル

$\kappa = \dfrac{8\pi G}{c^4}$: *Einstein* の重力定数

G : 万有引力定数

c : 真空中の光速度

である。

Einstein は、右辺のエネルギテンソルは重力場以外のものであるとした。左辺は、基本テンソルに関する2階の非線型偏微分方程式である。この考えは、重力場の解析方法を絶望的なほど難しくした。

その状況の中で、天才的数理物理学者達は右辺がゼロに等しい場合の *Einstein* 方程式の厳密解を見つけ出した。*Schwarzschild* の解は、その代表的なものであるが、原理的に空間にひずみ応力の成分はない。

しかし、*Yilmaz* は、右辺と左辺を逆に置き、重力場のみが存在す

る場合は

$$T_{\mu\nu} = \kappa(R_{\mu\nu} + R\ g_{\mu\nu}) \qquad (3.2)$$

であると考えた。この場合、Newton の理論からの類推で

$$\nabla^2 f = 0 \qquad (3.3)$$

と考えられるが、上式が成立している空間においても、一般には

$$f_k \neq 0 \quad (k \neq 0) \qquad (3.4)$$

であるため、重力源質量の外部でもエネルギテンソルのゼロで無い成分がある。

たとえば、球対称静重力場の場合（x^0, r, θ, ϕ）座標系で、エネルギテンソルの混合成分のうち値を持つものは

$$\left.\begin{aligned} T^1_1 &= -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \\ T^2_2 &= \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \\ T^3_3 &= \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

である。

質量が球対称に原点付近にのみ存在する場合（遠方から見て、質点とみなせる場合）、総質量を M とすると、(2.3) 式より、

$$f = \frac{GM}{c^2 r} \qquad (3.6)$$

である。

(3.5)、(3.6) 式を見ると、これは、点電荷の作る電場の応力ひずみと類似の形をしていることは明白である。静電場において、二つの点電荷の間の面上で、*Maxwell* の応力を面積分して *Coulomb* の法則が得られるように、二つの質点の間の面上でこの応力を積分すると万有引力の法則が得られるはずである。

4. まとめと今後の問題点

重力の理論の歴史を見ると実にさまざまの理論が現れては消えていったことがわかる[4)]。

「*Newton* のスカラポテンシャルによる重力場理論」の4次元化は、*Einstein* もいったん試みながら取りやめている。この、「*Yilmaz* の理論の再検討案」はその系統に分類されるものであるが、すでに何度も述べているように、一般相対論の三つの検証（水星の近日点の移動、太陽の近傍をかすめる光線の屈折、重力場中の光源のスペクトルの赤色偏移）の内、はじめの二つを合理的に説明可能であり、*Schwarzschild* の解（これは *Einstein* の理論の系統である）との類似性から言っても、もう一つも説明可能と思われる。

もっとも困難なことは、*Yilmaz* の理論に現れるスカラが3次元スカラであり、4次元では、どのような性質の量かよくわからないことである。しかし、3次元のスカラであることは、*Schwarzschild* の解よりも、解析的取り扱いを容易にする。

次の論文では、二つの質点を隔てる面上で張力ひずみを面積分することにより、「*Newton* の万有引力」の法則が得られることを示すつもりである。

［完］

参考文献

1）　村田茂昭　「*H. Yilmatz* の 1958 年理論の再検討（Ⅱ）」札幌大学女子短期大学部紀要　第 33 号　p43 ～ 62　1998 年 3 月
2）　村田茂昭　「4 次元時空の基本テンソルと重力場の 4 次元スカラの関係について― *H.Yilmatz* 1958 理論の再検討―」札幌大学女子短期大学部紀要　第 21 号　1993 年 3 月　p21 ～ 28
3）　平川浩正　『相対論』第 2 版　p79　共立出版　1986 年
4）　たとえば、フランクフルト著、笠原克昌訳　『特殊および一般相対性理論―その歴史と意義―』　東京図書　1971 年

付録 I　直角直交座標系における異常 *Yilmaz* 時空の affine 接続係数

座標系の空間部分を、直角直交座標系とする。すなわち

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x, y, z) \qquad \text{(A1.1)}$$

とすると、基本テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{-2f} & & & 0 \\ & e^{2f} & & \\ & & e^{2f} & \\ 0 & & & e^{2f} \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.2)}$$

である。

ただし、f は、この空間の枠座標系（重力場を取り払った座標系）で下記の3次元のスカラ方程式を満たす。

$$\nabla^2 f = 0 \qquad \text{(A1.3)}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} f_k &\equiv \frac{\partial f}{\partial x^k} \\ f_{jk} &\equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A1.4)}$$

とすると、(A1.3) 式は、

$$g_3^{\mu\nu} D_{3,\mu} D_{3,\nu} f = 0 \qquad \text{(A1.5)}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{g_3}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{g_3}\, g_3^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^{\nu}}\right)=0 \quad \text{(A1.6)}$$

ただし、下付の添え字3は、3次元の量を示す。すなわち

$g_3^{\mu\nu}$	:	枠座標系の3次元の反変基本テンソル
g_3	:	枠座標系の3次元の共変基本テンソルの行列式
$D_{3,\mu}$	:	3次元の x^{μ} 軸に関する、共変微分演算子

である。

直角直交座標系の場合は、$g_3=1$ であるから、(A1.6) を、具体的に書くと

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0 \quad \text{(A1.7)}$$

$$\therefore f_{11}+f_{22}+f_{33}=0 \quad \text{(A1.8)}$$

ただし、下付の添え字は偏微分をあらわす。((A1.4) 式参照)

(A1.2) 式の基本テンソルを持つ4次元空間の affine 接続係数は

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{i\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{\mu}}\right) \quad \text{(A1.9)}$$

これらの内で、ゼロでない成分は

（1）i=0 の場合

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = -f_1 \\
&\Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{20} = -f_2 \\
&\Gamma^0_{03} = \Gamma^0_{30} = -f_3 \\
&\Gamma^0_{00} = -f_0 \\
&\Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = f_0\, e^{4f}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A1.10)}$$

（2）i=1 の場合

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = f_0 \\
&\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = f_2 \\
&\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = f_3 \\
&\Gamma^1_{00} = -f_1\, e^{-4f} \\
&\Gamma^1_{11} = f_1 \\
&\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = -f_1
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A1.11)}$$

（3）i=2 の場合

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = f_0 \\
&\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = f_1 \\
&\Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = f_3 \\
&\Gamma^2_{00} = -f_2\, e^{-4f} \\
&\Gamma^2_{22} = f_2 \\
&\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{33} = -f_2
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A1.12)}$$

（4）i=3 の場合

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = f_0\\
&\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = f_1\\
&\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = f_2\\
&\Gamma^3_{00} = -f_3\, e^{-4f}\\
&\Gamma^3_{33} = f_3\\
&\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = -f_3
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A1.13)}$$

（付録 I 終）

付録 II　直角直交座標系における異常 *Yilmaz* 時空の *Ricci* のテンソル

Ricci のテンソルの式をあらためて書くと

$$\begin{aligned}
R_{ik} &= R^{\nu}{}_{i\nu k}\\
&= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\nu}_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^{k}}\Gamma^{\nu}_{i\nu} + \Gamma^{\mu}_{ik}\Gamma^{\nu}_{\nu\mu} - \Gamma^{\mu}_{i\nu}\Gamma^{\nu}_{k\mu}
\end{aligned} \qquad \text{(A2.1)}$$

○ R_{00} の計算

$$R_{00} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\nu}_{00} - \frac{\partial}{\partial x^{0}}\Gamma^{\nu}_{0\nu} + \Gamma^{\mu}_{00}\Gamma^{\nu}_{\nu\mu} - \Gamma^{\mu}_{0\nu}\Gamma^{\nu}_{0\mu} \qquad \text{(A2.2)}$$

◇ 第 1 項

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\nu}_{00} = -f_{00} - (f_{11} + f_{22} + f_{33})e^{-4f} + 4\left((f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2\right)e^{-4f}$$

(A2.2a)

◇ 第 2 項

$$-\frac{\partial}{\partial x^{0}}\Gamma^{\nu}_{0\nu}=-2f_{00} \qquad \text{(A2.2b)}$$

◇ 第 3 項

$$\Gamma^{\mu}_{00}\Gamma^{\nu}_{\nu\mu}=-2(f_0)^2+\left((f_1)^2+(f_2)^2+(f_3)^2\right)e^{-4f} \qquad \text{(A2.2c)}$$

◇ 第 4 項

$$-\Gamma^{\mu}_{0\nu}\Gamma^{\nu}_{0\mu}=-4(f_0)^2-2\left((f_1)^2+(f_2)^2+(f_3)^2\right)e^{-4f} \qquad \text{(A2.2d)}$$

以上 4 項を合算して

$$\therefore R_{00}=-3f_{00}-6(f_0)^2-\left(f_{11}+f_{22}+f_{33}\right)e^{-4f} \qquad \text{(A2.3)}$$

○ R_{11} の計算

$$R_{11}=\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\nu}_{11}-\frac{\partial}{\partial x^{1}}\Gamma^{\nu}_{1\nu}+\Gamma^{\mu}_{11}\Gamma^{\nu}_{\nu\mu}-\Gamma^{\mu}_{1\nu}\Gamma^{\nu}_{1\mu} \qquad \text{(A2.4)}$$

◇ 第 1 項

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\nu}_{11}=f_{00}\,e^{-4f}+f_{11}+f_{22}+f_{33}+4(f_0)^2e^{4f} \qquad \text{(A2. 4a)}$$

◇第２項

$$-\frac{\partial}{\partial x^{1}}\Gamma^{\nu}_{1\nu}=-2f_{11} \qquad \text{(A2.4b)}$$

◇第３項

$$\Gamma^{\mu}_{11}\Gamma^{\nu}_{\nu\mu}= 2(f_0)^2e^{4f}+2(f_1)^2-2(f_2)^2-2(f_3)^2 \qquad \text{(A2.4c)}$$

◇第４項

$$-\Gamma^{\mu}_{1\nu}\Gamma^{\nu}_{1\mu}=-2(f_0)^2e^{4f}-4(f_1)^2+2(f_2)^2+2(f_3)^2 \qquad \text{(A2.4d)}$$

以上４項を合算して

$$\therefore R_{11}=f_{00}e^{4f}-\left(f_{11}+f_{22}+f_{33}\right)+4(f_0)^2e^{4f}-2(f_1)^2 \quad \text{(A2.5)}$$

同様にして

$$\therefore R_{22}=f_{00}e^{4f}-\left(f_{11}+f_{22}+f_{33}\right)+4(f_0)^2e^{4f}-2(f_2)^2 \quad \text{(A2.6)}$$

$$\therefore R_{33}=f_{00}e^{4f}-\left(f_{11}+f_{22}+f_{33}\right)+4(f_0)^2e^{4f}-2(f_3)^2 \quad \text{(A2.7)}$$

○その他の成分

さらに、同様な計算によって、この例では、*Ricci* のテンソルのその他の成分は、すべてゼロであることがわかる。

$$R_{ik}\ (i\neq k)=0 \qquad \text{(A2.8)}$$

（付録Ⅱ終）