H. Yilmazの1958年理論の再検討(Ⅱ)

(Reexaminaition of H. Yilmatz' 1958 Theory (Ⅱ))

村 田 茂 昭

§1. は じ め に

前回発表したごとくに、私は、長年の迷いの後で、我々の時空は4次元異常Riemann空間でるとの見解…現代物理学ではあたりまえの見解…に達した。そもそも、私は何故に、4次元正常Riemann空間論を創成しようとしたのか? それは、H. Yilmazが1958年に発表した重力場の理論[1]に現れる重力場の3次元スカラ関数の4次元化[2]のためであった。現在の、Schwarzschildの解が少なくとも弱い重力場の解析において近似的に正しく、Yilmazの理論中で基本テンソルの指数関数の肩に現れる関数fを4次元スカラにするためには、正常Riemann空間論が一番簡単明瞭であった。

しかし、前論文[3]で述べたごとくに、それは考え直さなければならない。本論文と、同名の…(Ⅱ)が無いだけの…論文を発表したことがある[4]が、これは研究会の前刷りであって、時の経過とともに消え去る性質のものであるので、重複部分や改めた部分について特に言及はしない。この論文の再検討を5年前に発表した[5]ので、実質的には、本論文は3度目の検討となる。

§2. Yilmazのスカラ

Yilmazの1958年理論においては、重力場の基本テンソルは次の形をしている。

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} -(h_0)^2\exp(-2f) & & & \\ & (h_1)^2\exp(2f) & & \mathbf{0} \\ & & (h_2)^2\exp(2f) & \\ \mathbf{0} & & & (h_3)^2\exp(2f) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

ここで、h_kは測度係数である。h_0は論文(5)では、常に1を想定していたが、前論文[3]により、そういう楽観はできなくなった。

(2.1)式のfは、Yilmazによると、物質のないところで次の3次元のスカラ方程式を満たす。

$$\nabla^2 f=0 \tag{2.2}$$

ところが、4次元時空においての共変性を重要視すると、fは、次の式を満たすべきである。

$$g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu f=0 \tag{2.3}$$

しかし、Yilmazの理論は、4次元時空の曲率Rがスカラであることと、fが(2.3)式を満

たすことを両立させることができない。[(2),(5)]

すなわち、枠座標系（重力場を取り去った座標系[(2)]…この考えは、現在の主流の重力場の理論にはない）が、デカルト的である場合

$$h_k = 1\ (k = 0,1,2,3) \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\therefore R &= 6f_{00}\exp(2f) - 2\exp(-2f)(f_{11}+f_{22}+f_{33}) \\ &\quad + 18(f_0)^2\exp(2f) - 2\exp(-2f)((f_1)^2+(f_2)^2+(f_3)^2)\end{aligned} \tag{2.5}$$

ただし、

$$f_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{2.6}$$

$$f_{\mu\mu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\mu^2}} \tag{2.7}$$

上式を見れば、R は f のスカラ形式にはなっていないため R と f がともに４次元スカラであることは不可能である。以前の論文においては、空間の構造を変えて（４次元正常*Riemann*空間にして）R と f がともに４次元スカラであることを実現しようとした。[(2)] しかし、それは、前論文で述べたように破綻した。

なお、現代物理学の主流の理論は、*Yilmaz* の基本的考え（と私が想像するもの）…まず宇宙を覆うような大域的座標系を考え、しかる後、物質をあちこちに配置する…を受け入れないから、私の考えはただちに却下されるであろう。しかし、場に関する現代物理学の余りにも複雑な理論を聞くとき、彼らが成功しつつあるとはとても信じられない。何かの理論的予想値とは、少なくとも数値的に３桁ぐらいは正しくあってほしい。しかし、トップクォークとか言う粒子の質量（エネルギ）の予想は、オーダーさえ怪しかった。これは、実験で確認するための加速機の予算に直せば、何億ドルも違うのであり、「理論的」予測などと、とても言えたものではない。

Yilmaz の理論は、当初から、「我々の時空の構造を明らかにすれば、素粒子のことがもっとわかるであろう」という含みを持っていると思われる。したがって、私も、あれこれ検討しているのであるが、最近は、かなり前途が厳しいと考える。これについては、あとで言及する。

さて、正常*Riemann*空間論が破綻したところで、次はどの案を取るべきか？　論文(5)によれば、

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(h_0)^2\exp(2f) & & & \mathbf{0} \\ & (h_1)^2\exp(2f) & & \\ & & (h_2)^2\exp(2f) & \\ \mathbf{0} & & & (h_3)^2\exp(2f) \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

であれば、R, f ともに４次元スカラであるという条件は満足する。しかし、これは、あきらかに *Schwarzschild* の解とは、あわない。たとえば、計算によると、水星の近日点は後退しなければならない。水星の近日点の前進量は、かなり、問題のある数値なのである[(2)]が、符号が反対では、新しい観測結果がでないかぎり諦めざるを得ない。

そうすると、f が４次元スカラであるという仮定は放棄せざるを得ない。これは、「我々の時空の基本テンソルは、ある特定の座標系でのみ、*Yilmaz* の基本テンソルの形になる」ことを意味する。しかし、(2.4), (2.5) 式を見ると、f（および測度係数）が時間の関数でなければ、これはあまり問題ないことがわかる。源時空、実時空[(3)]の議論からすると、測度係数が宇宙の年令にからむことはあきらかであるが、第１次近似としてこれを無視すれば、時間的に変動する重力場以外の問題においては、f はスカラであることは保証される。余計な条件が付いたことによって、当初の理想よりは一歩後退するが、これでも *Schwarzschild* の解よりはずっとましなのであ

る。

Yilmaz のスカラが、3次元のスカラであることは、あきらかであるから、静止している微小質量の分布がわかると、これを積分して任意の点（粒子の外部の点）における重力場を計算できる。*Schwarzschild* の解に現れる、*Newton* のスカラの様な項は、3次元スカラでも何でもない変な量であることを考えると、ブラックホール派はいったいどうやって、分布する質量（複数の質点による場合も同じ）による重力場を計算しているのであろうか？

§3．*Yilmaz* 時空における測地線の方程式

以下においては、*Yilmaz* のスカラが、完全な4次元スカラではない（静的な場合しか扱えない）にしても、それがいかにスマートに従来の観測結果を説明できるかを述べる。なお、*Yilmaz* の業績が正当に評価されていないために、(2.1) 式のような基本テンソルを持つ時空には名前はついていないが、以下においては、これを *Yilmaz* 時空と呼ぶ。この時空に関する制限事項は、f と h_k が時間の関数であってはいけないことだけであるから、*Schwarzschild* の時空よりは、ずっと一般的形をしている。

この章においては、いわゆる水星の近日点の前進について解析するための準備として測地線の方程式を計算する。(質量のない粒子…光子等…については別の計算が必要であり、第5章において述べる。)

A. Einstein が最初に計算した[6]この問題は、実は一体問題とでも呼ぶべきものである。すなわち、巨大質量の近くで、質量を持つ微小質点の運動を解析するものである。微小質点は巨大質量が作る重力場を乱さないとして計算するので、一体問題なのである。すなわち、微小質点は、巨大質量の作る重力場の中で、測地線上の平行移動運動を行う。

§3.1 球対称 *Yilmaz* 時空の基本テンソルと affine 接続係数

以下において、4次元座標を

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, r, \theta, \varphi) \tag{3.1}$$

とする。ただし

$$x^0 = \mathrm{ct} \tag{3.2}$$

ここで

t：我々の通常使用している時間座標
c：真空中の光速度

なお、4次元*Riemann*空間であるから全座標が「空間座標」なのであるが、しばしば、説明の便宜上、第0座標を時間座標、第1、2、3座標を空間座標と呼ぶ。

球対称*Yilmaz* 時空の基本テンソルは、

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\exp(-2f) & & & \\ & \exp(2f) & & \mathbf{0} \\ & & r^2\exp(2f) & \\ \mathbf{0} & & & r^2\sin^2\theta\exp(2f) \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

ここで f は、物質のないところで、次の3次元のスカラ方程式を満たす。

$$\nabla^2 f = 0 \qquad (2.\ 2) \qquad （再掲）$$

残念ながら、f は、4次元スカラではない。しかし、時間座標を変更せずまた、空間座標の変換式が時間座標を含まない場合、任意の座標変換にたいして共変的に変化する。

球対称に分布する分布質量の外側では、(2. 2) 式より

$$f = \frac{a}{r} \tag{3. 4}$$

$$\because a \equiv \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{c}^2} \tag{3. 5}$$

ここで、

M：球状分布する質量の総量

G：*Newton* の万有引力の定数

である。なお、a は、他の著書とは異なり、いわゆる *Schwarzschild* の半径の半分の値に取られている。a は、この系の距離係数にあたり、2倍しないほうが合理的であると考える。

f の座標に関する偏微係数のうちで、ゼロでないものは

$$f' = \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{a}{r^2} \tag{3. 6}$$

である。一方この系 affine 接続係数は

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right) \tag{3. 7}$$

であるから、ゼロでない成分は下記のとおりである。なお、簡単のため、誤解のおそれのない場合は、$\exp(2f)$ を e^{2f} と表記することにする。

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} &= \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} = -f' \\ &= \frac{a}{r^2} \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{00} &= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} = -f' \mathrm{e}^{-4f} \\ &= \frac{a}{r^2} \mathrm{e}^{\frac{-4a}{r}} \end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = f' \\ &= -\frac{a}{r^2} \end{aligned} \tag{c}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-2f} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathrm{e}^{2f}) \\ &= -(r + r^2 f') = -(r - a) \end{aligned} \tag{d}$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{33}}{\partial r} = -\frac{1}{2}e^{-2f}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin^2\theta\, e^{2f})$$
$$= -(r+r^2 f')\sin^2\theta = -(r-a)\sin^2\theta \qquad \text{(e)}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{e^{-2f}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 e^{2f})$$
$$= (\frac{1}{r}+f') = \frac{1}{r^2}(r-a) \qquad \text{(f)}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}\frac{e^{-2f}}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(r^2\sin^2\theta\, e^{2f})$$
$$= -\cos\theta\sin\theta \qquad \text{(g)}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{e^{-2f}}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin^2\theta\, e^{2f})$$
$$= (\frac{1}{r}+f') = \frac{1}{r^2}(r-a) \qquad \text{(h)}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\frac{e^{-2f}}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(r^2\sin^2\theta\, e^{2f})$$
$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \qquad \text{(i)}$$

§ 3.2 球対称状に分布する巨大質量の外部の測地線

§ 3.2.1 測地線の方程式

通常の理論にしたがって x^k 軸に関する測地線の方程式は

$$\frac{d^2x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \qquad (3.8)$$

である。

質量を持つ粒子の、測地線上の平行移動の速度が常に光速以下であるとすれば、移動経路は常に time-like でなければならない。したがって、測地線上のパラメータ λ は、time-like なものを選ばなければならない。すなわち、座標値が微小に異なる2点間の space-like な距離を s とした場合、これらの微小量 $d\lambda$ と ds は、次のような関係にある。

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$
$$= -d\lambda^2 \qquad (3.9)$$

[注] なお、λ、$d\lambda$ を用いても、測地線の方程式を求める方法（*Euler* の方程式等）に数式上の変更はなく、(3.8) 式が得られる。ただし、次の式に注意しなければならない。

$$-\left(\frac{d\lambda}{d\lambda}\right)^2 = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = -1 \qquad (3.10)$$

上式は、球対称 *Yilmaz* 時空においては、具体的には、下式のごとくになる。

$$-e^{-2f}\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2+e^{2f}\left(\frac{dx^1}{d\lambda}\right)^2+r^2e^{2f}\left(\frac{dx^2}{d\lambda}\right)^2+r^2\sin^2\theta\, e^{2f}\left(\frac{dx^3}{d\lambda}\right)^2=-1 \quad (3.11)$$

ただし

$$f=\frac{a}{r} \quad (3.12)$$

$$\because a\equiv\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{c}^2} \quad (3.13)$$

である。

§3.2.2　第0座標に関する解

(3.8) 式より

$$\frac{d^2x^0}{d\lambda^2}+\Gamma^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \quad (3.14)$$

上式のうち、有意な式は

$$\frac{d^2x^0}{d\lambda^2}+2\Gamma^0_{01}\frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dx^1}{d\lambda}=0 \quad (3.15)$$

前述の(a)式より

$$\frac{d^2x^0}{d\lambda}+\frac{2a}{r^2}\frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dx^1}{d\lambda}=0 \quad (3.16)$$

ここで

$$S_0\equiv\frac{dx^0}{d\lambda} \quad (3.17)$$

とすると

$$\frac{dS_0}{d\lambda}+\frac{2a}{r^2}S_0\frac{dr}{d\lambda}=0 \quad (3.18)$$

$$\therefore \frac{dS_0}{S_0}=-\frac{2a}{r^2}dr \quad (3.19)$$

積分を実行すると

$$\log S_0=\frac{2a}{r}+K_0 \quad (3.20)$$

なお、ここで、log は自然対数である。従来の私の表記法とは異なるが、このほうが解りやすいので採用した。以後、自然対数関数以外の対数関数を扱う際には、底を明記することとする。(たとえば $\log_{10}\mathrm{x}$)

$$\therefore S_0=e^{K_0}e^{\frac{2a}{r}}$$

$$=Ke^{\frac{2a}{r}} \quad (3.21)$$

ここで $e^{K_0}\rightarrow K$ と書き変えた。K は、境界条件によって定まる任意定数である。

$$\therefore \frac{dx^0}{d\lambda}=Ke^{\frac{2a}{r}} \quad (3.22)$$

§3.2.3　第1座標に関する解

第1座標に関する測地線の方程式は

$$\frac{d^2x^1}{d\lambda^2}+\Gamma^1_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \tag{3.23}$$

3．1節の結果より、第1座標に関する測地線の方程式で有意な式は

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2}+\Gamma^1_{00}\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2+\Gamma^1_{11}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\Gamma^1_{22}\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2+\Gamma^1_{33}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2=0 \tag{3.24}$$

この式からは、解（$\frac{dx^0}{d\lambda}$ 等の関数形）を求めることができない。あとで、他の座標に関する測地線の方程式を解いてられた解を上式に代入して、この式を検討する。

§3．2．4　第2座標に関する解

第2座標に関する測地線の方程式は

$$\frac{d^2x^2}{d\lambda^2}+\Gamma^2_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \tag{3.25}$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{d\lambda^2}+2\Gamma^2_{12}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\theta}{d\lambda}+\Gamma^2_{33}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2=0 \tag{3.26}$$

この式は、すべての運動が、座標の中心に球対称に分布する巨大質量（惑星の運動の場合は、太陽）の赤道面に限られるという条件で満たされる。(球対称の重力場においては、この条件を設定しても一般性を失なわない)

すなわち、

$$\theta=\frac{\pi}{2}=const. \tag{3.27}$$

であれば

$$\Gamma^2_{33}=-\cos\theta\sin\theta=0 \tag{3.28}$$

$$\because \cos\frac{\pi}{2}=0 \tag{3.29}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{d\lambda}=0 \tag{3.30}$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{d\lambda^2}=0 \tag{3.31}$$

実際の水星では、公転面と太陽の赤道面とは若干ずれており、かつ、太陽は真の球ではなくやや偏平である。これに関しいろいろ議論があるが、ここでは論じない。

§3．2．5　第3座標に関する解

第3座標に関する測地線の方程式は

$$\frac{d^2x^3}{d\lambda^2}+\Gamma^3_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \tag{3.32}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}+2\Gamma^3_{13}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\lambda}+2\Gamma^3_{23}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\lambda}=0 \tag{3.33}$$

一方、(3.30) 式より

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}+2\left(\frac{1}{r}-\frac{a}{r^2}\right)\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\lambda}=0 \tag{3.34}$$

ここで

$$S_3\equiv\frac{d\varphi}{d\lambda} \tag{3.35}$$

とおいて

$$\frac{dS_3}{d\lambda}=-\left(\frac{2}{r}-\frac{2a}{r^2}\right)\frac{dr}{d\lambda}S_3 \tag{3.36}$$

$$\therefore\frac{dS_3}{S_3}=-\left(\frac{2}{r}-\frac{2a}{r^2}\right)dr$$

$$=-\frac{2}{r}dr+\frac{2a}{r^2}dr \tag{3.37}$$

両辺を積分すると

$$\log S_3=-2\log r-\frac{2a}{r}+K_3 \tag{3.38}$$

$$\therefore S_3=\exp(K_3)\exp\left(-2\log r-\frac{2a}{r}\right)$$

$$=\frac{h}{r^2}\mathrm{e}^{-\frac{2a}{r}} \tag{3.39}$$

$$\because h\equiv\exp(K_3) \tag{3.40}$$

K_3 から書き変えられた、任意定数 h は、プランクの定数ではなく、また、測度係数でもないことに注意しなければならない。(中心力の場で運動する質点の回転モーメントに関連するこの係数を、h であらわすのは、標準的教科書では一般的であるように思われる。)

$$\therefore\frac{d\varphi}{d\lambda}=\frac{h}{r^2}\mathrm{e}^{-\frac{2a}{r}} \tag{3.41}$$

§ 3.3 第1座標に関する測地線の方程式のチェック

未検討のままであった第1座標に関する測地線の方程式を、次の二項に分ける。

$$\mathrm{I}_1\equiv\frac{d^2r}{d\lambda^2} \tag{3.42}$$

$$\mathrm{I}_2\equiv\Gamma^1_{00}\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2+\Gamma^1_{11}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\Gamma^1_{22}\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2+\Gamma^1_{33}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \tag{3.43}$$

ここで、微少質点(水星)の運動を、太陽の赤道面に限ると

$$\theta=\frac{\pi}{2} \tag{3.44}$$

$$\therefore\sin\theta=1 \tag{3.45}$$

さらに

$$\frac{d\theta}{d\lambda}=0 \tag{3.46}$$

であるから

$$\mathrm{I}_2=\frac{a}{r^2}\mathrm{e}^{\frac{-4a}{r}}\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2-\frac{a}{r^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2-(r-a)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \tag{3.47}$$

である。

一方、(3.10) より

$$-e^{-2f}\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2+e^{2f}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+r^2e^{2f}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2=-1 \tag{3.48}$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2=-e^{-\frac{2a}{r}}+K^2-\frac{h^2}{r^2}e^{-\frac{4a}{r}} \tag{3.49}$$

この式の両辺を、λ で微分すると

$$2\frac{dr}{d\lambda}\frac{d^2r}{d\lambda^2}=\left(-\frac{2a}{r^2}e^{-\frac{2a}{r}}+\frac{2h^2}{r^3}e^{-\frac{4a}{r}}-\frac{4ah^2}{r^4}e^{-\frac{4a}{r}}\right)\frac{dr}{d\lambda} \tag{3.50}$$

$$\therefore \mathrm{I}_1=\frac{d^2r}{d\lambda^2}=-\frac{a}{r^2}e^{-\frac{2a}{r}}+\frac{h^2}{r^3}e^{-\frac{4a}{r}}-\frac{2ah^2}{r^4}e^{-\frac{4a}{r}} \tag{3.51}$$

となる。

一方、I_2 の右辺に、今まで求めた $\dfrac{dx^0}{d\lambda}$、$\dfrac{dr}{d\lambda}$、$\dfrac{d\varphi}{d\lambda}$、を代入すると

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2&=\frac{a}{r^2}e^{\frac{-4a}{r}}\left(Ke^{\frac{2a}{r}}\right)^2-\frac{a}{r^2}\left(-e^{-\frac{2a}{r}}+K^2-\frac{h^2}{r^2}e^{-\frac{4a}{r}}\right)-(r-a)\left(\frac{h}{r^2}e^{-\frac{2a}{r}}\right)^2\\&=\frac{ae^{-\frac{2a}{r}}}{r^2}-\frac{h^2}{r^3}e^{-\frac{4a}{r}}+\frac{2ah^2}{r^4}e^{-\frac{4a}{r}}\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\therefore \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2=0 \tag{3.53}$$

よって、第1座標に関する測地線の方程式 (3.24) が、任意定数を含む三つの解 (3.22), (3.30), (3.41) 式によって厳密に満たされることが確認された。従来の解法では、直接に具体的近似解を求めるためにこのチェックが欠落している。

§4．水星の近日点の前進

太陽系の惑星の中で、もっとも強い重力場の中で公転しているのは水星である。この惑星の運動を、球対称重力場の中の微小質点の運動として解析する。

座標系の中心に位置する仮想的太陽の赤道面を、仮想的水星が公転しているとする。まず、積分定数 K を決定しなければならない。水星の軌道は、円に近い楕円であるとする。$r\to\infty$ になると、*Newton* 力学からの推定により、公転速度は遅くなり、軌道上では時間のみが経過し $rd\varphi$ の値は、dx^0 に比べて小さくなると考えられる。軌道が円に近ければ dr はもともと小であり、また遠方では、先に述べた事情で dx^0 に比べて小となるであろう。

かくして、(2. 1) 式を考察すれば、

$$r\to\infty \tag{4. 1}$$

のとき

$$d\lambda\to dx^0 \tag{4. 2}$$

となるべきである。

$$\lim_{r\to\infty}\frac{dx^0}{d\lambda}=1 \tag{4.3}$$

$$\therefore K=1 \tag{4.4}$$

(3.49) 式より

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2=-\mathrm{e}^{-\frac{2a}{r}}+1-\frac{h^2}{r^2}\mathrm{e}^{-\frac{4a}{r}} \tag{4.5}$$

(4.5) 式はパラメータ λ による微分方程式であるが、このパラメータでは扱いにくいので r を φ の関数として扱うように変形する。

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 \tag{4.6}$$

$$=\frac{r^4}{h^2}\left(-\mathrm{e}^{\frac{2a}{r}}+\mathrm{e}^{\frac{4a}{r}}-\frac{h^2}{r^2}\right) \tag{4.7}$$

ここで

$$u=\frac{1}{r} \tag{4.8}$$

とおくと

$$\frac{du}{dr}=-\frac{1}{r^2}=-u^2 \tag{4.9}$$

$$\therefore\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{dr}{du}\right)^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{h^2u^4}\left(-\mathrm{e}^{\frac{2a}{r}}+\mathrm{e}^{\frac{4a}{r}}-\frac{h^2}{r^2}\right) \tag{4.10}$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{h^2}\left(-\mathrm{e}^{2au}+\mathrm{e}^{4au}-h^2u^2\right) \tag{4.11}$$

上式の両辺を φ で微分すると

$$2\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2}=\frac{1}{h^2}\left(-2a\mathrm{e}^{2au}+4a\mathrm{e}^{4au}-2h^2u\right)\frac{du}{d\varphi} \tag{4.12}$$

$$\therefore\frac{d^au}{d\varphi}=\frac{a}{h^2}\left(-\mathrm{e}^{2au}+2\mathrm{e}^{4au}\right)-u \tag{4.13}$$

水星の軌道上で $0<au\ll 1$ として e^{au} を級数展開し2項で打ち切ると

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}\cong\frac{a}{h^2}\left(-\left(1+2au+\frac{4a^2u^2}{2}\right)+2\left(1+4au+\frac{16a^2u^2}{2}\right)\right)-u \tag{4.14}$$

$$\therefore\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\left(1-\frac{6a^2}{h^2}\right)u\cong\frac{a}{h^2} \tag{4.15}$$

ここで

$$l\equiv\frac{a}{h^2} \tag{4.16}$$

$$\beta\equiv\frac{6a^2}{h^2}=\frac{6a}{l} \tag{4.17}$$

とすると

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+(1-\beta)u=\frac{1}{l} \tag{4.18}$$

もしも、$\beta=0$ であれば

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{1}{l} \tag{4.19}$$

この式は、*Nweton* 力学における、球対称重力場の中の微小質点の運動を記述する方程式にほかならない。上式の解は

$$u=\frac{1}{l}+\frac{\mathrm{e}}{l}\cos(\varphi-\varphi_0) \tag{4.20}$$

これは、$r=0$ を一つの焦点とする2次曲線(eが正であれば、楕円)をあらわし、e は、その離心率である。u の最大・最小がそれぞれ r の最小・最大に対応する。通常のデータブック[7]に掲載されている長半径を r_0 とすれば

$$r_0=\frac{r_{\max}+r_{\min}}{2}=\frac{l}{1-\mathrm{e}^2} \tag{4.21}$$

である。

実際には、β は、ゼロではなく(4.17)式の値であるので、(4.18)式の解は

$$u=\frac{1}{l}+\frac{\mathrm{e}}{l}\cos\left(\sqrt{1-\beta}\,(\varphi-\varphi_0)\right) \tag{4.22]}$$

となる。あきらかに、φ 座標の周期 (2π) と u 座標(したがって r 座標)の周期が異なる。

u 座標の周期を φ_1 とすると

$$\sqrt{1-\beta}\,\varphi_1=2\pi \tag{4.23}$$

$$\varphi_1=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\beta}}\cong 2\pi+\pi\beta \tag{4.24}$$

$$\therefore \beta\ll 1 \tag{4.25}$$

したがって、軌道は近似的に楕円であるが、1周ごとに近日点が角度(rad.)

$$\beta=\frac{6a}{l}\pi \tag{4.26}$$

だけ前進する。(なお、r_0 と e を与えることが l したがって h を定めることとなる。)

この値は、*Einstein* の理論より得られる値と全く同じである。しかし、彼は、摂動法という誤差の評価があいまいにしか得られない方法によって求めた。私の方法は、まず、厳密解またはそれにきわめて近い解を求め、しかる後に近似計算をしている。この方法は、どの程度の大きさの項を無視したのかただちに求めることができるばかりでなく、もっと強い重力場に関して数値計算するの際にも非常に有利である。

この値を、角度に換算すると、100年間につき約43秒である。

ただし、数値計算において、次の値を採用した。[7]

G : 6.672×10^{-11} m/(kg・sec^2) (万有引力の定数)

M : 1.9891×10^{30}　kg　(太陽の質量)
c : 2.99792458×10^{8}　m/ sec　(真空中の光速度)
r_0 : 0.579×10^{11}m　水星の軌道の長半径
e : 0.2056　(水星の軌道の離心率)

[注] この値を計算するときは水星の公転周期が0.2409年であることに注意しなければならない。すなわち、水星は100年間に約415回公転する。

この値は、前に述べた[8]ように、若干問題のある値である。すなわち、実際の観測値は、これよりもはるかに大きく (100年につき574秒)、約43秒というのは、それから木星の影響等を引き去ったいわば残り滓なのである。さらに、比較的最近になって、太陽の光球部分がやや偏平であることが発見された。これが、木星の近日点の前進に影響するのではないかという説もある。

定性的考察より、弱い重力場においては、*Schwarzschild* の基本テンソルと *Yilmaz* の基本テンソルが、等価であることは自明である。しかしながら、より精緻な理論の当然の帰結として *Einstein* と全く同じ値を得たことは興味深い。

§５．太陽をかすめる光線の軌跡

光線 (光子) を、微小な質量をもつ粒子のように考えると、太陽の表面をかすめて伝搬するときに当然屈折をする。このような、*Newton* 力学的計算は、結局 (4.19) 式を解いていることになる。初めて、この計算を行ったのは、Sortner[9]であり、1803年に発表されている。その値は、屈折角を角度の秒であらわすと、0.875となる。

これとは独立に、*Einstein* が、一般相対論の成果として、同じ値を1911年に発表したが、すぐに、その２倍の値、屈折角1.75秒に訂正した。(1915年) 彼の思考過程についてはよく解らないが、私の解析をみれば、「光路上では４次元距離は常にゼロである。」という、彼自身が、1905年に発表した理論を (1911年の段階では) 考慮していなかったことは明白である。

§５.1　光路上の拘束条件

Einstein の特殊相対論の延長として一般相対論をとらえると、光の経路においては、つねに

$$g_{\mu\nu} ds^{\mu} ds^{\nu} = 0 \tag{5.1}$$

でなければならない。

この拘束条件のために

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{5.2}$$

とおいて、光路上の２点間の距離

$$s_{12} = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{d\lambda} d\lambda \tag{5.3}$$

を最小にするような測地線を求める方法は、行き詰まってしまう。

Yilmaz 時空においては、

$$g_{\mu\nu} = 0 \ (\text{where } \mu \neq \nu) \tag{5.4}$$

であるから、(5. 1) 式は

$$-(\mathrm{h}_0)^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{f}}(dx^0)^2+(\mathrm{h}_1)^2\mathrm{e}^{2\mathrm{f}}(dx^1)^2+(\mathrm{h}_2)^2\mathrm{e}^{2\mathrm{f}}(dx^2)^2+(\mathrm{h}_3)^2\mathrm{e}^{2\mathrm{f}}(dx^3)^2=0 \quad (5.5)$$

となる。

測度係数のうちで h_0 については、将来は、かならずしもいつも、1に選ぶことができなくなる可能性があるが、本論文が取り扱う問題の範囲では

$$\mathrm{h}_0=1 \quad (5.6)$$

と置いて問題はないであろう。そうすると

$$(dx^0)^2=(\mathrm{h}_1)^2\mathrm{e}^{4\mathrm{f}}(dx^1)^2+(\mathrm{h}_2)^2\mathrm{e}^{4\mathrm{f}}(dx^2)^2+(\mathrm{h}_3)^2\mathrm{e}^{4\mathrm{f}}(dx^3)^2 \quad (5.7)$$

ここで、dx^0 は、光路上の時間座標の微分である。

光線は媒質内と同様に、重力場内でも、時間経過がもっとも少ない経路を通ると仮定すると、変分法で計算する際の作用積分として下記を採用すればよい。

$$s_{12}=\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2}dx^0=\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda \quad (5.8)$$

ここで

$$\left.\begin{array}{l} s\to\mathrm{s}\\ dx^0\to\mathrm{ds}\\ dx^1\to\mathrm{dx}^1\\ dx^2\to\mathrm{dx}^2\\ dx^3\to\mathrm{dx}^3 \end{array}\right\} \quad (5.9)$$

と書き変えると、(5. 7) 式は

$$\mathrm{ds}^2=(\mathrm{h}_1)^2\mathrm{e}^{4\mathrm{f}}(\mathrm{dx}^1)^2+(\mathrm{h}_2)^2\mathrm{e}^{4\mathrm{f}}(\mathrm{dx}^2)^2+(\mathrm{h}_3)^2\mathrm{e}^{4\mathrm{f}}(\mathrm{dx}^3)^2 \quad (5.10)$$

となる。

§ 5 . 2　仮想 3 次元空間

(5. 10) 式は、いままでの議論の延長線上で、次のように解釈できる。
仮想的 3 次元空間があり、その基本テンソルは

$$\mathrm{g}_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}(\mathrm{h}_1)^2\mathrm{e}^{4\mathrm{f}} & & 0\\ & (\mathrm{h}_2)^2\mathrm{e}^{4\mathrm{f}} & \\ 0 & & (\mathrm{h}_3)^2\mathrm{e}^{4\mathrm{f}}\end{bmatrix} \quad (5.11)$$

である。また、f は、3 次元スカラであり、次の方程式を満たす。

$$\mathrm{g}_0^{\mu\nu}\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu\mathrm{f}=0 \quad (5.12)$$

ここで $\mathrm{g}_0^{\mu\nu}$ は 3 次元の枠座標系の基本テンソルである。ただし、3 次元空間であるので、*Einstein* の省略記法において、上下に出現する同じ指標について 1 から 3 まで動かして、和を

取るものとする。もちろん、(5.12) は、次の式と等価である。

$$\nabla^2 \mathrm{f} = 0 \tag{5.13}$$

f は f と同じ量であるが、仮想空間における式の形を整えるため、字体をそろえた。同じ理由で前節の a と同じ定数を、a であらわす。

この、仮想的空間の測地線上を、光線は平行移動するものと考えられる。仮想空間と、現実の四次元時空の空間部分は、座標の値が名目上一致する。したがって、仮想空間で光路を計算できると、それが、現実の光路と座標値が一致する。

この 3 次元空間の座標値が微小な値だけ異なる 2 点間の距離に関して

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{5.14}$$

ただし、*Einstein* の省略記法の和をとるのは、上下に現れる同一の指標について、1 から 3 までであることに注意せよ。この空間は、紛れもなく、3 次元正常*Riemann*空間であるから、測地線の方程式を求めるのは簡単である。

仮想 3 次元空間における光の経路上の距離 λ（4 次元空間においては､時間座標の経過量に対応する）をパラメータにして、作用積分

$$s_{12} = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{d\lambda} d\lambda \tag{5.15}$$

が極小値をもつような方程式群を変分法の *Euler* の式を計算して求め、しかる後

$$\lambda = s \tag{5.16}$$

おくと、測地線の方程式は

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \gamma^k_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \tag{5.17}$$

となる。なお、ここで、測地線のパラメータは、前章とまぎらわしくならないように s を使用した。また、仮想空間の affine接続係数を $\gamma^k_{\mu\nu}$ とした。

$$\gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{\alpha}} \right) \tag{5.18}$$

また、測地線の方程式を求めるためには、次の式が重要である。

$$g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds} \right)^2 \left(\frac{dx^{\nu}}{ds} \right)^2 = 1 \tag{5.19}$$

§5.3 球対称Yilmaz時空に対応する仮想 3 次元空間の測地線

§5.3.1 基本テンソルとaffine接続係数

3 次元の球座標系

$$(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \varphi) \tag{5.20}$$

において、基本テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{4f} & & 0 \\ & r^2e^{4f} & \\ 0 & & r^2\sin^2\theta\, e^{4f} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

である。

この基本テンソルにもとづくと、(5.19) 式は、具体的には、

$$e^{4f}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2e^{4f}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\, e^{4f}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 1 \tag{5.22}$$

一方、affine接続係数でゼロでないものは

$$\gamma^1_{11} = -\frac{2a}{r^2} \tag{j}$$

$$\gamma^1_{22} = -(r+r^2f') = -(r-2a) \tag{k}$$

$$\gamma^1_{33} = -(r+2r^2f')\sin^2\theta = -(r-2a)\sin^2\theta \tag{l}$$

$$\gamma^2_{12} = \gamma^2_{21} = (\frac{1}{r}+2f') = \frac{1}{r^2}(r-2a) \tag{m}$$

$$\gamma^2_{33} = -\cos\theta\sin\theta \tag{n}$$

$$\gamma^3_{13} = \gamma^3_{31} = (\frac{1}{r}+2f') = \frac{1}{r^2}(r-2a) \tag{o}$$

$$\gamma^3_{23} = \gamma^3_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \tag{p}$$

である。

§ 5.3.2　第1座標に関する測地線の方程式の解

§ 3.2.3に当たる部分である。

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \gamma^1_{11}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \gamma^1_{22}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \gamma^1_{33}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \tag{5.23}$$

この式から解を求めるのは難しいが、$\frac{d^2r}{ds^2}$、$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2$、$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$、$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$ が判明した時点で、この式に代入しチェックしなければならない。(これは、§ 3.3と、ほとんど同じなので本論文では省略する。)

§ 5.3.3　第2座標に関する解

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + 2\gamma^2_{12}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \gamma^2_{33}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = 0 \tag{5.24}$$

この種の球対称問題においては、座標系を適切にとれば、一般性を失わず光線の経路を、

$$\theta = \frac{\pi}{2} = \mathit{const.} \tag{5.25}$$

の面に限ることができる。

$$\therefore \frac{d\theta}{ds} = 0 \tag{5.26}$$

affine接続係数に関する(n)式も考慮すると、§ 3.2.4と同様に、(5.24) 式は、恒等的に

成立する。

§ 5．3．4　第3座標に関する解

測地線の方程式は

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+2\gamma^3_{13}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+2\gamma^3_{23}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0 \tag{5.27}$$

§ 5．3．1でもとめたaffine接続係数の値を代入すると

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+2(\frac{1}{r}-\frac{2a}{r^2})\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0 \tag{5.28}$$

ここで

$$S_3\equiv\frac{d\varphi}{ds} \tag{5.29}$$

とおくと

$$\therefore\ \frac{dS_3}{S_3}=-(\frac{2}{r}-\frac{4a}{r^2})dr \tag{5.30}$$

積分を実行して

$$\log S_3=-2\log r-\frac{4a}{r}+K_3 \tag{5.31}$$

$$\therefore\ S_3=\frac{h}{r^2}e^{-\frac{4a}{r}} \tag{5.32}$$

ここで

$$\because\ h\equiv\exp(K_3) \tag{5.33}$$

かくして

$$\therefore\ \frac{d\varphi}{ds}=\frac{h}{r^2}e^{-\frac{4a}{r}} \tag{5.34}$$

となる。この仮想3次元空間では、見かけ上重力場のスカラの値がが2倍になっていることが解る。これは、いわゆる、「空間の縮み」に「時間の遅れ」がすべて空間の基本テンソルにしわよせされているからである。

§ 5．4　太陽の重力場による光の屈折

前章の（4. 5）式に対応する式は、(5.22)、(5.27)、(5.28)、(5.34) 式を考慮して

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=e^{-\frac{4a}{r}}-\frac{h^2}{r^2}e^{-\frac{8a}{r}} \tag{5.35}$$

前章と同様にして、微分方程式の独立変数を s から φ に変える。

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2$$
$$=\frac{r^4}{h^2}\left(e^{\frac{4a}{r}}-\frac{h^2}{r^2}\right) \tag{5.36}$$

ここで、次のごとくに従属変数を変換する。

$$u \equiv \frac{1}{r} \tag{5.37}$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{h^2}\left(e^{4au} - h^2u^2\right)$$

$$= \frac{1}{h^2}e^{4au} - u^2 \tag{5.38}$$

ここで、両辺を φ で微分すると

$$2\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \left(\frac{1}{h^2}4ae^{4au} - 2u\right)\frac{du}{d\varphi} \tag{5.39}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{2a}{h^2}e^{4au} - u \tag{5.40}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} \cong \frac{2a}{h^2}(1+4au) - u \tag{5.41}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\varphi^2} + (1 - \frac{8a^2}{h^2})u \cong \frac{2a}{h^2} \tag{5.42}$$

h を定める境界条件は、光線が太陽の表面をかすめるとき

$$\frac{dr}{ds} = 0 \ (\text{when} \ r = R) \tag{5.43}$$

である。

ここで、s は、時刻座標であったことを思い起こすべきである。また、R は、太陽の光球の赤道半径でデータブック(7)によると

$$R = 6.96 \times 10^8 m \tag{5.44}$$

である。

$$\therefore \frac{h^2}{R^2}e^{-\frac{8a}{R}} = e^{-\frac{4a}{R}} \tag{5.45}$$

$$\therefore h = Re^{\frac{4a}{R}} \tag{5.46}$$

$$\frac{4a}{R} \cong 8.28 \times 10^{-6} \tag{5.47}$$

であるから、この場合は、(5.45) 式の指数関数の項は、無視できるであろう。念のためしばらくは残しておく。

なお、光線の経路の至る所で

$$0 < au \leq \frac{a}{R} \cong 2.12 \times 10^{-6} \tag{5.48}$$

であるから、近似的微分方程式 (5.42) を導いた近似計算は、妥当であるといえる。

ここで、

$$\beta' \equiv \frac{8a^2}{h^2} = \frac{8a^2}{R^2}e^{\frac{-8a}{R}} \tag{5.49}$$

と置くと、(5.42) 式は、次のように書くことができる。

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + (1-\beta')u = \frac{2a}{R^2}e^{\frac{-8a}{R}} \tag{5.50}$$

ある程度以上強い重力場では、この式を解かなければならない。この式を解くことはさほど困難ではないが、*Einstein* が計算した程度の近似計算でよいのであれば、次の式を解けば充分である。

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\cong\frac{2a}{R^2} \tag{5.51}$$

この式の解は

$$u=\frac{1}{R}\cos\varphi+\frac{2a}{R^2} \tag{5.52}$$

ただし、近似的微分方程式の解であるために、$\varphi=0$ で $u=\dfrac{1}{R}$ にならないが相対誤差は（5.47）式の程度である。

光線の経路は $\varphi=0$ で、太陽の光球の表面をかすめ（$r=R$）無限遠方（$r\to\infty$ すなわち $u=0$）で、φ が $\dfrac{\pi}{2}$ より γ だけずれるとすれば

$$\frac{1}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)+\frac{2a}{R^2}=0 \tag{5.53}$$

$$\therefore\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)=-\frac{2a}{R} \tag{5.54}$$

$$\therefore\sin\gamma=\frac{2a}{R} \tag{5.55}$$

この場合 $0\ll\gamma\ll1$ であるから

$$\gamma\cong\frac{2a}{R} \tag{5.56}$$

である。

この値は、太陽の表面から、無限遠方まで光線が伝搬する間にずれる角度であるから、太陽半径に比して充分遠方にいる観測者にとっては、光線の屈折角はこの2倍となる。

$$\gamma_{\mathrm{observed}}=2\gamma=\frac{4a}{R} \tag{5.57}$$

なお、太陽と地球間の平均距離（地球の公転軌道長半径）を R_E と記すと

$$R_E=1.496\times10^{11}\,(m) \tag{5.58}$$

であるから

$$\frac{R}{R_E}\cong4.75\times10^{-3} \tag{5.59}$$

となり、有効数字3桁程度の計算で満足するのであれば、我々地球上の観測者は、充分遠方にいると言える。

（5.57）式の $\gamma_{\mathrm{observed}}$ の値は、*Einstein* が2度目に発表（1915年）した値と等しい。最初の発表の値はこの半分であった。その値であれば、先に述べたように、*Newton* 力学の範囲で計算可能であり、*Sortner* によって1803年に発表されていた。[9] 先に述べたように、「4次元距離が、光線の経路上でゼロになる」という条件を入れなければ、2倍にはならない。また、それだけの条件で得られる値である（(5.50) 式ではなくて、(5.51) 式の解を求めると得られる）と言うことは、水星の近日点の前進よりもラフな計算ででてくる量であるということである。この、近似計

算の精度を見積りは、従来の理論では、はなはだ、あいまいであった。

なお、この $\gamma_{\mathrm{observed}}$ の値は、radian であらわすと、(5.47) の値そのものである。これを、角度の秒に換算すると、1.75となるのである。この値は、直接の観測値であって、天文学の観測技術の向上とともに、現在では、3桁程度は正しいことが確認されている。しかし、(5.59) 式のところで述べたように、観測技術がさらに向上したら、理論値を算出する際、観測者の位置をもっと考慮すべきであることは明白である。

§6. まとめ・その他の問題点

H. Yilmaz の1958年理論を検討し、水星の近日点の前進と太陽をかすめる光線の軌跡に関しては、*Einstein* の理論と全く同じ結果を、より精緻な計算法によって得ることができた。

この場合、*Einstein* の理論とは、*Schwarzchild* の解にもとづくものであるが、*Yilmaz* の理論の方が、現段階でも優れている。すなわち、基本テンソルに現れる*Newton* のポテンシャルに対応する項が、一応説明できる。これを、本論文においては *Yilmaz* のスカラと呼んだが、残念ながら、この量は4次元時空においては、スカラとしてはふるまわない。

すべての正しい理論物理学の法則は、4次元座標変換に対して共変なテンソル(または、テンソル密度)式でなければならないという一般相対性理論の理念から言うと、これはまことに残念なことである。「特別な空間で、特別な式が成立する」という物理法則は、普遍的な法則であろうか? あるいは、*Yilmaz* の理論は、実は近似式で、重力場を4次元スカラで表現できる理論が存在し、その近似として*Yilmaz* の理論があるという可能性がある。*Yilmaz* の理論の一番の盲点は、「基本テンソルが、対角項のみ成分をもつ」、とくに、「時間と空間の干渉はない」と言うことを前提にしたことではないかと思われる。

物理学の理論においては、歴史的には我々人類は、自然の正しい法則を知らない状況から出発している。我々の先達は、まず、近似的な理論を求め、つぎにそれにもとづき別の分野の知識を拡大するにつれて、前をふりかえって、その理論の近似をさらに高めるという方法をとってきたと考える。

しかし、いつもこれができると考えるのは楽観的にすぎるのではないのであろうか? 具体的に言おう。現代物理学界の主流から全く外れた見解なのであるが、古典的手法で(つまり、量子力学をさしあたり脇においても)、荷電粒子の構造がかなり解析できるという考えを貫くと仮定する。(*A. Einstein* がそうであったと考えられる。) 楽観的見地からは、「我々の時空の真の構造を知らなくとも、ある程度正しい近似時空モデルにもとづき、ある程度正しい荷電粒子の古典モデルが得られる。近似時空モデルの近似度をさらに高めると、さらに近似度の高い荷電粒子の古典モデルが得られる。」と言うことになる。

自然の構造がそうあってほしいのはやまやまであるが、最近私は、この問題に関しては、悲観的になっている。つまり、私は、「我々が、真の時空構造の知識を獲得しなければ、荷電粒子に関して近似的古典モデルをすら得られないのではないか?」と考えるに至った。

今世紀のはじめの、量子力学の確率の解釈に関する、*A. Einstein* と *N. Bohr* の大論争は、多くの専門家達の見るところでは、*A. Einstein* の敗北に終った。そして、一般社会における過大とも言える名声に反して *A. Einstein* が、理論物理学界の第一線においては影が薄くなった理由は、彼の時空モデルが正しくなかったからだと私は考えている。とくに、重力源質量の存在しない空間で、エネルギテンソルの全成分がゼロであるという *Einstein* の仮定(*Schwarzschild* の解はこの仮定のもとづく数学的厳密解である。)は、*Yilmaz* の1958年理論では成立しない。*Einstein* の哲学よりも *Yilmaz* の哲学の方が、より正しいというのが、私の立場なのであるが、

残念ながら、*Yilmaz* のスカラが真の４次元スカラではなかったために、エネルギテンソルまでは、まだ到達していない。ひきつづき、これらの問題点の検討を進める予定である。

なお、本論文を読めば明らかであるが、*Yilmaz* の理論においては、球対称質量分布の場合、特異面が球の外部にできることは原理的にあり得ない。すなわち、彼の理論体系の中にはブラックホールは存在し得ない。現在、ブラックホールの存在の証明と喧伝される観測事実は、みな単に、非常に強力な重力場のもとでおこった現象を観測しているにすぎないと思われる。私の考えによれば、ブラックホールとは、*Schwarzschild* の強引な座標変換によって得られた数学的幻影にしかすぎない。 ［完］

［参 考 文 献］

(1) *H. Yilmaz "New Approach to General Relativity" Phys. Rev. Vol. 111, No.* 5, *Sept,* 1958

(2) 村田茂昭「*H. Yilmaz* の1958年理論の正常*Riemann*空間へのかきなおし（Ⅰ）」
札幌大学女子短期大学部紀要　第25号　pp43～65　平成７年３月28日（1995.3.28）
村田茂昭「*H. Yilmaz* の1958年理論の正常*Riemann*空間へのかきなおし（Ⅱ）」
札幌大学女子短期大学部紀要　第26号　pp27～41　平成７年９月28日（1995.9.28）

(3) 村田茂昭「*Lorentz* 変換の新解釈」
札幌大学女子短期大学部紀要　第30号　pp23～34　平成９年９月28日（1997.9.28）

(4) 村田茂昭「*Yilmaz'* 1958理論の再検討」電気学界電磁解理論研究会資料　EMT-83-24（1983.10.2）

(5) 村田茂昭「四次元時空の基本テンソルと重力場のスカラの関係について」
－*H. Yilmaz'* 1958理論の再検討－
札幌大学女子短期大学部紀要　第21号　pp21～28　平成５年３月28日（1993.3.28）

(6) *A. Einstein "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie" S.B. Preuss. Akad. Wiss.* (1915) pp831～839
和訳　湯川秀樹　監修　内山龍雄　訳　アインシュタイン選集２　pp115～131
［Ａ４］水星の近日点移動に対する一般的相対性理論による説明　共立出版　1970

(7) たとえば、国立天文台編「理科年表　平成７年(机上判)」丸善㈱（1994.11.30）

(8) 村田茂昭「*H. Yilmaz* の1958年理論の正常*Riemann*空間へのかきなおし（Ⅱ）」
札幌大学女子短期大学部紀要　第26号　p35　平成７年９月28日（1995.9.28）

(9) *Clifford M. Will* 著　松田・二間瀬 訳「アインシュタインは正しかったか？」ＴＢＳブリタニカ　第４章　1991.5
なお、*Will* は、「*Sortner* のこの論文は、いったん忘れ去られた後で、1921年に再発見され、アインシュタインに対する人種偏見にもとづく攻撃に利用された。」と述べている。したがって、この論文の存在を明らかにすることは、私もあまり気が進まないが、事実であることは間違いなさそうなので、ここに記す。なお、屈折角 0.875秒という値は、ホイヘンスの原理からもでてくる。（下記の文献参照）
フランクフルト「特殊および一般相対論」§３．７　東京書房