正常 Riemann 空間における Levi-Civita の記号と座標系の符号について

村 田 茂 昭

1. 序　　　論

以前に、Levi-Civita の記号と擬テンソルについて論じた。[1]

その後、古典物理学の舞台を、4次元正常 Riemann 空間に変更する企てにとりかかったため、修正が必要になった。この修正の前に、座標系の符号の定義に関する部分を、より簡潔な形に書きなおした。(第2章)

第3章では、一般の3次元 Riemann 空間における Levi-Civita の記号とそれに関連する事項を論じている。しかし、過度な一般論を展開することを避け、第4章では3次元正常 Riemann 空間、第5章では4次元正常 Riemann 空間に関する事項のみを論じている。

なお、本論文は数学的論文である。私のかねての古典場の理論に関する新しい主張[2]に関連はあるが、本論文の要点は数学的部分にあり、何か、物理学上の新しい理論を主張している訳ではない。

2. 座標系の符号と偶座標系、奇座標系

以前の論文[1]においては、座標系の符号を論ずる際、まず「座標系の特性方程式」の定義からはじめた。この定義は、理解を助けるためには有用ではあるが、数学的には不必要である。次のように議論を進めると、ある特定の座標系（基準座標系C）から、一般の座標変換で導かれるすべての座標系を、二つの集合に合理的に分割することができる。3次元正常 Riemann 空間中に構築された、非相対論的古典物理学においては、この二つの集合は、それぞれ右手系と左手系に対応する。以前の論文で述べたように、数学的には、どちらが右手系であるか等は判別不可能であるが、座標系には性格の異なる二つのグループがあることは証明できる。

2.1　座標系の符号

〔追加公理1〕

ある特定の座標系を基準系と名付けCで表す。基準系の選び方は任意である。Cの符号を正と定義する。

（追加公理1終）

すなわち

$$\mathrm{sign}(\mathrm{C}) = 1 \tag{2.1}$$

ただし、$\mathrm{sign}(x)$ は x の符号の表す関数で

$$\left.\begin{array}{ll} x \text{ の符号が正のとき}:\mathrm{sign}(x) = 1 & \text{(a)} \\ x \text{ の符号が負のとき}:\mathrm{sign}(x) = -1 & \text{(b)} \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

である。x は何でもよいが (2.1) 式の場合は座標系と言う抽象的概念になっている。そのため (2.2) 式の場合別けの部分で、あえて不等式を使用しなかった。

C 系における座標を

$$x^\mu = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{2.3}$$

とする。この座標系を源にして、一般の座標変換によって C′ 系に変換する。

C′ 系の座標を

$$x'^{\mu} = (x'^{1},\ x'^{2},\ \cdots,\ x'^{n}) \tag{2.4}$$

とする。新座標 x'^{μ} と旧座標 x^{μ} は次の n個の関数 $f^{\mu}(\ )$ で関係づけられているとする。

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x^{\nu}) \tag{2.5}$$

ただし、f^{μ} の性質として、特異点の数は多くても、有理数の数の程度の無限大 (denumerable) 程度である必要があると考えられるが、ここでは深くは論じない。

座標変換にかかわる変換係数の混合テンソルは

$$\mathrm{M}^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{2.6}$$

$$\overline{\mathrm{M}}^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \tag{2.7}$$

である。テンソル M^{μ}_{ν}, $\overline{\mathrm{M}}^{\mu}_{\nu}$ の作る行列をそれぞれ mat〔M^{μ}_{ν}〕, mat〔$\overline{\mathrm{M}^{\mu}_{\nu}}$〕 とする。ここで

mat〔X〕: 2階のテンソルXの作る行列式

とする。(以前の論文では Mat と記したが、本論文では、mat に変更した。)

以前の論文で論じたように、行列の積の理論と、テンソルの縮約を、簡単に対応づけるためには、X は混合テンソルがふさわしいが、表記の自由度を増すために、X は、2階のテンソルであればよいこととする。(反変、共変、混合の別は問わない。) ただし、行列にした場合の指標と行、列との対応は、必要な場合は、その都度指定しなければならない。

たとえば

$$\mathrm{M}^{\mu}_{\rho}\,\overline{\mathrm{M}^{\rho}_{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{2.8}$$

(δ^{μ}_{ν} は Kronecker の delta)

であるためには mat〔M^{μ}_{ν}〕は μ 行 ν 列 行列でなければならない。

以下において、det(x) を行列 x から得られる行列式とする。

$$\mathrm{M} \equiv \det\left[\mathrm{mat}\,〔\mathrm{M}^{\mu}_{\nu}〕\right] \tag{2.9}$$

$$\overline{\mathrm{M}} \equiv \det\left[\mathrm{mat}\,〔\overline{\mathrm{M}^{\mu}_{\nu}}〕\right] \tag{2.10}$$

以上の M^{μ}_{ν}, $\overline{\mathrm{M}^{\mu}_{\nu}}$, M, $\overline{\mathrm{M}}$ は、Mat を mat と変更した点を除くと、以前の論文と全く同じである。

〔追加公理2〕

C 系から C′ 系への座標変換に際して座標系の符号は次のように変換される。

$$\mathrm{sign}\,(\mathrm{C}') = \mathrm{sign}(\mathrm{M}) \times \mathrm{sign}(\mathrm{C}) \tag{2.11}$$

ただし、M は座標変換の変換係数の混合テンソルの作る行列式である。

(追加公理2終)

(注) M は、本論文においては (2.9) 式で表される。上記公理で必要な値は sign(M) であるから M をJacobian (定義の仕方で M や $\overline{\mathrm{M}}$ に対応する) とおきかえてもあいまいさはない。なぜならば

$$\mathrm{sign}(\overline{\mathrm{M}}) = \mathrm{sign}(\mathrm{M}) \tag{2.12}$$

であるから。

2.2 偶座標系と奇座標系

〔定義1〕sign(M) が1である座標変換を正の座標変換、−1である座標変換を負の座標変換と呼ぶ。

今までの議論より、C より任意の座標変換で得られるすべての座標系の集合 {C′} を次の二

つの集合に別けることができる。

$\{C_1'\}$: C より正の座標変換によって得られる座標系の集合

$\{C_2'\}$: C より負の座標変換によって得られる座標系の集合

ここで

$$\{C_E\} \equiv \{C\} \cup \{C_1'\} \tag{2.13}$$

$$\{C_O\} \equiv \{C_2'\} \tag{2.14}$$

とする。添字は、それぞれ偶（Even)、奇（Odd）を意味する。なお $\{C\}$ は基準系 C のみを含む集合である。

〔定義 2〕C を基準系とするとき $C_A \ni \{C_E\}$ である C_A を偶座標系、$C_B \ni \{C_O\}$ である C_B を奇座標系と呼ぶ。

〔定理 1〕

偶座標系間の座標変換は正の座標変換である。

◇証明

$C_A' \ni \{C_E\}$, $C_B' \ni \{C_E\}$ とする。C_A または C_B のいずれか一方が C であるときは自明である。それ以外の場合を論ずる。

C_A' の座標を $x_A'^{\mu}$, C_B' の座標を $x_B'^{\mu}$ とする。

$$x_A'^{\mu} = (x_A'^{1},\ x_A'^{2},\ \cdots,\ x_A'^{n}) \tag{P-1}$$

$$x_B'^{\mu} = (x_B'^{1},\ x_B'^{2},\ \cdots,\ x_B'^{n}) \tag{P-2}$$

C 系から C_A' 系および C 系から C_B' 系への座標変換におけるテンソルの変換に関する係数テンソルは

$$M_{A}{}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x_A'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{P-3}$$

$$\bar{M}_{A}{}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x_A'^{\nu}} \tag{P-4}$$

$$M_{B}{}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x_B'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{P-5}$$

$$\bar{M}_{B}{}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x_B'^{\nu}} \tag{P-6}$$

である。C_A' 系から C_B' 系へ C 系を経由して座標変換がな行われるよう数式化すると

$$\begin{aligned} M_{AB}{}^{\mu}{}_{\nu} &= \frac{\partial x_B'^{\mu}}{\partial x_A'^{\nu}} = \frac{\partial x_B'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x_A'^{\nu}} \\ &= M_{B}{}^{\mu}{}_{\alpha}\, \bar{M}_{A}{}^{\alpha}{}_{\nu} \end{aligned} \tag{P-7}$$

上式は、行列の積の形に書くことができる。

$$\mathrm{mat}\,[M_{AB}{}^{\mu}{}_{\nu}] = \mathrm{mat}\,[M_{B}{}^{\mu}{}_{\alpha}] \times \mathrm{mat}\,[\bar{M}_{A}{}^{\alpha}{}_{\nu}] \tag{P-8}$$

ただし、たとえば、mat $[M^{\mu}_{\nu}]$ は μ 行 ν 行 の行列を表すものとする。

ここで

$$M_{AB} \equiv \det\left[\mathrm{mat}\,[M_{AB}{}^{\mu}{}_{\nu}]\right] \tag{P-9}$$

$$M_{B} \equiv \det\left[\mathrm{mat}\,[M_{B}{}^{\mu}{}_{\alpha}]\right] \tag{P-10}$$

$$\bar{M}_{A} \equiv \det\left[\mathrm{mat}\,[\bar{M}_{A}{}^{\alpha}{}_{\nu}]\right] \tag{P-11}$$

とすると、行列と行列式の理論より

$$M_{AB} = M_B \bar{M}_A \tag{P-12}$$

集合 $\{C_E\}$ の定義より

$$M_B > 0$$

$$\overline{M}_A (= \frac{1}{M_A}) > 0$$

$$\therefore M_{AB} > 0$$

$$\therefore \mathrm{sign}(M_{AB}) = 1 \qquad (P-13)$$

（証明終）

〔定理 2 〕

奇座標系間の座標変換は、正の座標変換である。

◇証明

$C'_A \ni \{C_O\}$, $C'_B \ni \{C_O\}$ とする。定理1の証明と同様にして

$$M_{AB} = M_B \overline{M}_A \qquad (P-14)$$

となるが、集合 $\{C_O\}$ の定義より

$$M_B < 0$$

$$\overline{M}_A < 0$$

$$\therefore M_{AB} > 0$$

$$\therefore \mathrm{sign}(M_{AB}) = 1 \qquad (P-15)$$

（証明終）

〔定理 3 〕

偶座標系から奇座標系への座標変換は負の座標変換である。

◇証明

$C'_A \ni \{C_E\}$, $C'_B \ni \{C_O\}$ とする。C'_A が C である場合は自明である。それ以外の場合を論ずる。

定理1の証明と同様に

$$M_{AB} = M_B \overline{M}_A \qquad (P-16)$$

一方、集合 $\{C_E\}$, $\{C_O\}$ の定義より

$$M_B < 0$$

$$\overline{M}_A > 0$$

$$\therefore M_{AB} < 0$$

$$\therefore \mathrm{sign}(M_{AB}) = -1 \qquad (P-17)$$

（証明終）

〔定理 4 〕

奇座標系から偶座標系への座標変換は負の座標変換である。

（証明略）

以上の定理群を考察すれば、追加公理1および2が妥当な仮定であることは明白である。

3. n 次元 Riemann 空間の Levi-Civita の記号

共変的 Levi-Civita の記号を $e_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 反変的 Levi-Civita の記号を $e^{i_1 i_2 \cdots i_n}$ とする。その値は

$$\left.\begin{matrix} e_{i_1 i_2 \cdots i_n} \\ e^{i_1 i_2 \cdots i_n} \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 1 \cdots (12 \cdots n) \to (i_1 i_2 \cdots i_n) \text{ が偶置換のとき} \\ -1 \cdots (12 \cdots n) \to (i_1 i_2 \cdots i_n) \text{ が奇置換のとき} \\ 0 \cdots \text{その他の場合}\ ((i_1 \cdots i_n) \text{ の中に同じものがある場合}) \end{cases} \qquad (3.1)$$

である。

共変的記号は重み（weight）マイナス1のテンソル密度、反変的記号は重みプラス1のテンソ

ル密度である。

n 次元正常 Riemann 空間の基本テンソルを $g_{\mu\nu}$ とする。その行列式を g とすると

$$g=\frac{1}{n\,!}\,\mathrm{e}^{i_1i_2\cdots i_n}\,\mathrm{e}^{j_1j_2\cdots j_n}\,g_{i_1j_1}\,g_{i_2j_2}\cdots g_{i_nj_n} \tag{3.2}$$

と書けるから、g は重みプラス2のテンソル密度である。g より重みプラス1のテンソル密度を得るためには、平方根をとるだけでは不充分で、座標系の符号をつけ加えてやらなければならない。

$$\overset{\cdot\cdot}{\sqrt{g}}=\mathrm{sign}(\mathrm{C})\times\sqrt{g} \tag{3.3}$$

なお、正常 Riemann 空間では特異点以外では

$$g>0$$

である。

上記の $\overset{\cdot\cdot}{\sqrt{g}}$ が重みプラス1のテンソル密度となる。

n 次元の Kronecker の delta は下記のように書くことができる。

$$\delta_i^j=\frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{j\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}\,\mathrm{e}_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}} \tag{3.4}$$

この混合テンソルは容易に拡張できる。上下の指標が2個ずつある場合は

$$\delta_{kl}^{ij}=\frac{1}{(n-2)!}\,\mathrm{e}^{ij\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}}\,\mathrm{e}_{kl\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-2}} \tag{3.5}$$

以下同様にして n が多ければ、多種の拡張された Kronecker の delta が得られる。

なお、反変的符号と共変的符号の関係は

$$\mathrm{e}^{i_1i_2\cdots i_n}=g\,g^{i_1\alpha_1}\,g^{i_2\alpha_2}\cdots g^{i_n\alpha_n}\,\mathrm{e}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} \tag{3.6}$$

$$\mathrm{e}_{i_1i_2\cdots i_n}=\frac{1}{g}\,g_{i_1\alpha_1}g_{i_2\alpha_2}\cdots g_{i_n\alpha_n}\,\mathrm{e}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} \tag{3.7}$$

である。この式は、行列式の理論より、明らかである。

4.　3次元正常 Riemann 空間の Levi-Civita の記号と各種の量

4.1　3次元の Levi-Civita の記号

共変的記号 e_{ijk} と反変的記号 e^{ijk} のとる値は、

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{e}_{ijk}\\ \mathrm{e}^{ijk}\end{matrix}\right\}=\begin{cases}1\cdots(123)\rightarrow(ijk)\ \text{が偶置換のとき}\\ -1\cdots(123)\rightarrow(ijk)\text{が奇置換のとき}\\ 0\cdots\text{その他の場合}\end{cases} \tag{4.1}$$

である。

4.2　Levi-Civita の記号を含むテンソル量

三つのベクトル A、B、C があるときそれらと、Levi-Civita の記号との組みあわせで得られるテンソル（スカラ、ベクトル、2階のテンソル）を下記に示す。なお、番号は以前に発表した論文の擬スカラ、軸性ベクトルの番号に一致させている。

◇三つのベクトルより作られるスカラ

1. $\phi=\overset{\cdot\cdot}{\sqrt{g}}\,\mathrm{e}_{\mu\nu\rho}\,A^\mu B^\nu C^\rho$

2. $\phi=\dfrac{1}{\overset{\cdot\cdot}{\sqrt{g}}}\,\mathrm{e}^{\mu\nu\rho}\,A_\mu B_\nu C_\rho$

◇二つのベクトルより作られるベクトル（ベクトル積）

3. $\mathrm{P}_k = \ddot{\sqrt{g}}\,\mathrm{e}_{k\mu\nu}\, B^\mu C^\nu$

3′. $\mathrm{P}_k = \dfrac{1}{2}\,\ddot{\sqrt{g}}\,\mathrm{e}_{k\mu\nu}(B^\mu C^\nu - B^\nu C^\mu)$

4. $\mathrm{P}^k = \dfrac{1}{\ddot{\sqrt{g}}}\,\mathrm{e}^{k\mu\nu}\, B_\mu C_\nu$

4′. $\mathrm{P}^k = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\ddot{\sqrt{g}}}\,\mathrm{e}^{k\mu\nu}(B_\mu C_\nu - B_\nu C_\mu)$

◇ローテーション (rotation)

5. $\mathrm{P}^k = \dfrac{1}{\ddot{\sqrt{g}}}\,\mathrm{e}^{k\mu\nu}\,\partial_\mu B_\nu$

5′ $\mathrm{P}^k = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\ddot{\sqrt{g}}}\,\mathrm{e}^{k\mu\nu}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)$

◇微小体積要素のスカラ

6. $\mathrm{d}v = \ddot{\sqrt{g}}\, e_{\mu\nu\rho}\, du^\mu dv^\nu dw^\rho$

3. 4. 5 の表現よりも、3′. 4′. 5′ の形が一般的である。しかし前者の方が簡潔な表記法である。

なお、$\ddot{\sqrt{g}}$ のかわりに、$\sqrt{g}$ を入れると、いわゆる擬テンソル（擬スカラ、軸性ベクトル）になってしまうのである。つまり「座標系の符号」の概念の発想は、擬テンソルを追放するためのものである。

また、4と5が、同じベクトルの別な表現（共変成分および反変成分）であること
すなわち

$$\mathrm{P}^k = g^{k\mu}\mathrm{P}_\mu \tag{4.2}$$

$$\mathrm{P}_k = g_{k\mu}\mathrm{P}^\mu \tag{4.3}$$

を証明するためには、共変的 Levi-Civita の記号と反変的 Levi-Civita の記号の間の基本的関係式（3.6),（3.7）式が必要である。この式は3次元の場合は

$$\mathrm{e}^{ijk} = g\, g^{i\alpha} g^{\alpha\beta} g^{k\gamma}\,\mathrm{e}_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.4}$$

$$\mathrm{e}_{ijk} = \frac{1}{g}\, g_{i\alpha}\, g_{i\beta}\, g_{k\gamma}\,\mathrm{e}^{\alpha\beta\gamma} \tag{4.5}$$

となる。

5. 4次元正常 Riemann 空間における諸問題

5.1 4次元正常 Riemann 空間における Levi-Civita の記号

従来の論文との対比が容易になるように、指標を（１２３４）から（０１２３）は書きなおすことにする。Levi-Civita の記号の値は、

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{e}_{ijkl}\\ \mathrm{e}^{ijkl}\end{matrix}\right\} = \begin{cases} 1\cdots(0123)\to(ijkl)\ \text{が偶置換のとき} \\ -1\cdots(0123)\to(ijkl)\text{が奇置換のとき} \\ 0\cdots\text{その他の場合}\end{cases} \tag{5.1}$$

となる。

異常 Riemann 空間の場合とは異なり

$$\mathrm{sign}(\mathrm{e}_{ijkl}) = \mathrm{sign}(\mathrm{e}^{ijkl}) \tag{5.2}$$

であるから、非常に簡単である。第2章にしたがって、座標の符号を定義する。以下の計算においては、異常 Riemann 空間における関係式と混乱しないように、従来の私の習慣にしたがって、4次元正常 Riemann 空間の基本テンソルを $\zeta_{\mu\nu}$ で記す。その行列式は ζ と表す。

$$\therefore \zeta = \det\left[\mathrm{mat}\,[\zeta_{\mu\nu}]\right] \tag{5.3}$$

ζ から得られる、重みの1の正しいテンソル密度は

$$\sqrt{\ddot{\zeta}} = \mathrm{sign}(\mathrm{C}) \times \sqrt{\zeta} \tag{5.4}$$

ここで、sign(C) は座標系の符号である。

これと、Levi-Civita の記号を用いれば、たとえば4次元の作用積分は、Lagrangean を L とするとき

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{L}\,\sqrt{\zeta}\,\mathrm{d}\Omega \tag{5.5}$$

$$\because \mathrm{d}\Omega = \mathrm{e}_{\mu\nu\rho\lambda} ds^{\mu} du^{\nu} dv^{\rho} dw^{\lambda} \tag{5.6}$$

である。微小ベクトル $ds^{\mu}, du^{\nu}, dv^{\rho}, dw^{\lambda}$ については、以前の論文を参照されたい。

なお

$$dv = \sqrt{\ddot{\zeta}}\; d\Omega \tag{5.7}$$

が、4次元の微小体積要素であり、これは真の4次元スカラである。

5.2　2階の反対称テンソルの dual テンソル

4次元、正常 Riemann 空間のきわだった特徴は、2階の反対称テンソル $F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}$ について、dual テンソルを明確に定義できることである。すなわち

$$\left.\begin{aligned} F_{ij} &= \zeta_{i\mu}\,\zeta_{i\nu}\,F^{\mu\nu} && \text{(a)} \\ F^{ij} &= \zeta^{i\mu}\,\zeta^{i\nu}\,F_{\mu\nu} && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} &\equiv dual\ (F_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\,\mathrm{e}^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &\equiv dual\ (F^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\,\sqrt{\ddot{\zeta}}\,\mathrm{e}_{\mu\nu\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \end{aligned} \tag{5.10}$$

共変成分に作用する *dual* 演算子と反変成分に作用する演算子の形が異なるが、実質的には同じである。すなわち (5.9) 式で得られた $\tilde{F}^{\mu\nu}$ と (5.10) 式で得られた $\tilde{F}_{\mu\nu}$ は、同じテンソルの異なった数学表現にしか過ぎない。

すなわち

$$\tilde{F}_{ij} = \zeta_{i\alpha}\,\zeta_{j\beta}\,\tilde{F}^{\alpha\beta} \tag{5.11}$$

〔証明〕

(5.9) 右辺を上式に代入して

$$\zeta_{i\alpha}\,\zeta_{j\beta}\,\widetilde{F}^{\alpha\beta} = \zeta_{i\alpha}\,\zeta_{j\beta}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\,\mathrm{e}^{\alpha\beta\rho\lambda}\,F_{\rho\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\,\zeta_{i\alpha}\,\zeta_{j\beta}\,\mathrm{e}^{\alpha\beta\rho\lambda}\,\zeta_{\rho\mu}\,\zeta_{\lambda\nu}\,F^{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\,\zeta\,\mathrm{e}_{ij\mu\nu}\,F^{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\,\sqrt{\ddot{\zeta}}\,\mathrm{e}_{ij\mu\nu}\,F^{\mu\nu}$$

$$= \widetilde{F}_{ij} \tag{5.12}$$

$$\because \zeta = \sqrt{\ddot{\zeta}} \times \sqrt{\ddot{\zeta}} \tag{5.13}$$

$$\because \mathrm{e}_{ijkl} = \frac{1}{\zeta}\,\zeta_{i\mu}\,\zeta_{j\nu}\,\zeta_{k\rho}\,\zeta_{l\lambda}\,\mathrm{e}^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{5.14}$$

5.3　dual 演算子の性質

異常 Riemann 空間においては

$$dual\ (dual\ (=-1(\tag{5.15}$$

と言う、若干変な結論となった。

しかし、正常 Riemann 空間においては

$$dual\ (dual\ (=1(\tag{5.16}$$

と言う、妥当な結果を得る。このことは、*dual* テンソルは、同じテンソルの異なった数学的な表現と見なしてよいことを示す。0座標が、時間座標、1，2，3座標が空間座標であれば、時間と空間を入れかえる（うらがえす）ことにあたる。

(5.16) 式の証明にとりかかる前に、4次元正常 Riemann 空間で、共変2次反変2次に拡張した Kronecker の delta を定義しておこう。

$$\delta^{ij}_{kl} = \frac{1}{2!}\,\mathrm{e}^{ij\mu\nu}\,\mathrm{e}_{kl\mu\nu} \tag{5.17}$$

この混合テンソルのとる値は

$$\delta^{ij}_{kl} = \begin{cases} 1 \cdots (ij) = (kl) \\ -1 \cdots (ij) = (lk) \\ 0 \cdots \text{それ以外} \end{cases} \tag{5.18}$$

ただし (ij) 等は指標の数字ならびを示す。

$$\left.\begin{array}{lr} \delta^{01}_{01} = \ \ 1 & \text{(a)} \\ \delta^{10}_{01} = -1 & \text{(b)} \\ \delta^{23}_{01} = \ \ 0 & \text{(c)} \end{array}\right\} \tag{5.19}$$

〔(5.16) 式の証明〕

$$dual\ (dual\ (F_{ij}))$$

$$= dual\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\,\mathrm{e}^{ij\rho\lambda}\,F_{\rho\lambda}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\sqrt{\ddot{\zeta}}\,\mathrm{e}_{ij\mu\nu}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\,\mathrm{e}^{\mu\nu\rho\lambda}\,F_{\rho\lambda}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{e}_{ij\mu\nu}\,\mathrm{e}^{\mu\nu\rho\lambda}\,F_{\rho\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta^{\rho\lambda}_{ij}\,F_{\rho\lambda}$$

$$= F_{ij} \tag{5.20}$$

$$\because F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$
$$\because \delta_{ij}^{\rho\lambda} = -\delta_{ij}^{\rho\lambda}$$

ただし　$(\mu\nu\rho\lambda) \to (\rho\lambda\mu\nu)$　は偶置換である。

（証明終り）

dual（*dual*（F^{ij}））より計算しても同じ、結論となる。

異常 Riemann 空間で、これがうまく行かないのは、Levi-Civita の反変的記号と共変的記号が、同じ物理量の異なる表現であることを守るかぎり

$$\mathrm{sign}\ (\mathrm{e}_{ijkl}) = -\mathrm{sign}\ (\mathrm{e}^{ijkl}) \tag{5.21}$$

となってしまうからである。

以上の結論は

$$\left.\begin{aligned} dual\ (dual\ (F_{ij})) &= F_{ij} \quad &\text{(a)} \\ dual\ (dual\ (F^{ij})) &= F^{ij} \quad &\text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad (5.22)$$

と言う、まことに望ましい式である。

5.4　その他の有用な定理

反対称テンソルから作られるスカラに関して

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \tag{5.23}$$

である。

〔証明〕

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sqrt{\ddot{\zeta}}\ \mathrm{e}_{\mu\nu\rho\lambda}\ F^{\rho\lambda} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\ \mathrm{e}^{\mu\nu\alpha\beta}\ F_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{4}\ \mathrm{e}_{\rho\lambda\mu\nu}\ \mathrm{e}^{\alpha\beta\mu\nu}\ F^{\rho\lambda}\ F_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}\ \delta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta}\ F^{\rho\lambda}\ F_{\alpha\beta} \\ &= F^{\alpha\beta}\ F_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

（証明終り）

6. 結　　　言

Levi-Civita の記号は、正常 Riemann 空間ではじめに定義されたと考えられる。それ故異常 Riemann 空間の式に、これを持ちこむと、種々「やりくり」する必要が生ずる。さらに　常に、どこかに矛盾が生じないかどうか見張っていなければならない。

その点正常 Riemann 空間では、すべてが簡単となり安心である。本論文で、述べたようなことは、すでに誰かが解析しているものと思われるが、Einstein の理論のせいで 4 次元 Riemann 空間の研究は、異常 Riemann 空間について論ずるのが主流となってしまった。すなわち、4 次元正常 Riemann 空間論は数学者の「お遊び」にしかすぎないことになってしまった。n 次元空間論には、n が特定の値（この場合には 4 ）のときにのみ成立する定理があり、応用数学としては、それらが重要なのではあるが。

「4 次元正常 Riemann 空間の方が、4 次元異常 Riemann 空間論よりはるかに簡単明瞭である。」と言っても、だから「我々の時空は、4 次元正常 Riemann 空間である。」と言う私の主張を直接支持するものではない。しかし、「正しい物理学の理論は単純であるべきである。」と言う考えは、楽観的にすぎるであろうか？　［完］

[参考文献]

(1) 村田茂昭「Levi-Civita の記号と擬テンソルについて」札幌大学女子短期大学部紀要　第24号 p15～18（1994.9.28）

(2) たとえば　村田茂昭「H. Yilmaz の1958年理論の正常 Riemann 空間への書きなおし(Ⅱ)」札幌大学女子短期大学部紀要　第26号　p27～41（1995.9.28）

（論文終）