H. Yilmaz の 1958 年理論の正常 Riemann 空間への書きなおし（Ⅰ）

村　田　茂　昭

1. は　じ　め　に

前論文[1]においては，数学的無矛盾性を追求する立場と，太陽の近傍程度の比較的弱い重力場（現在では，Schwarzschild 時空で説明できるとされている）に関する観測事実を説明できる理論を求める立場から，H. Yilmaz の理論は，若干の修正の後に，正常 Riemann 空間で展開すべきであることを示唆した。

現在の古典場の理論の正統的見地からすると，これはまさに，幻覚的とさえ言える理論となるのであるが，実際に試算してみると，意外にも妥当な結果が得られる。

我々の時空が，正常 Riemann 空間であると仮定すれば，ただちに，「では，電磁場に関する Maxwell の方程式が成立することが説明できるのか？」，「Michelson-Morley 型の実験結果を説明できるのか？」，「そもそも，正常 Riemann 空間に波動方程式が，成立し得るのか？」等々の，きびしい追求を受けることは，まちがいない。近年は，この種の問題で宗教裁判にかけられる可能性は，著しく減少したが，「この種の理論は，すべて，善良なる民を惑わすものであり，言論の自由を逸脱するものである。」と言う主張は，現在でもある。[2] 古くから，相対性理論マニアおよび，アンチ相対性理論マニアは，日本国のみならず，世界中に存在し，その中には，たしかに，目にあまるような個人攻撃を主旨としているものもあるのであろう。また，いちじるしく非論理的な「論文」を，私も拝見したことがある。それらは，それなりに，批判されるべきであるが，「Einstein の理論は真理であり，これに反する理論は，すべてまちがいで，民を惑わすよこしまなものであるから，すくなくとも出版人は自己規制すべきである。」という意見には反対である。

1920年代と思われるが，Einstein の相対論の勝利が（当時としては）確定的となった折，公開の席で，学会の長老より賛辞を受けたと伝えられる。（その長老の名前と，学会の開催地が思い出せないのは残念であるが，博識の方は教えてほしい。）その時の賛辞は，「今や，Einstein の理論は人間の真理となった。」であると，私は記憶している。彼（その長老）は，「真理」に「人間の」と言う形容詞をつけたのである。自然科学者を志ざす者は，特定の先達を神としてあがめてはいけない。従来の常識に反する理論でも，それが，純粋数学に礎をおく応用数学を解析の手段とし，実験結果，観測事実を合理的に説明することをめざしている場合には，多少の欠陥があっても，発表の自由をうばってはいけない。

なお，解析の手段としての数学について，一言，言及しておく。一般相対論を，展開する際に，Einstein は，物理学に Riemann 幾何学を導入した。これは，彼と彼の友人の M. Grossman の偉大な業績なのであるが，この時，彼等は，我々の時空を4次元異常 Riemann 空間であるとした。異常 Riemann 空間とは，微小な座標だけはなれた，2 点間の距離の二乗が，正にも負にも，ゼロにもなりうる空間である。この理論は，当時の純粋数学の理論にはなかったものである。つまり「2 + 2 = 4 となるような数学が正しい」見地[2] からすると，Einstein 自身が，すこしあやしげな数学を採用したのである。したがって，この時，純粋数学者の中には，反対する者があったと伝えられる。なぜならば，異常 Rieamann 空間においては Riemann 幾何学において，重要な位置を占める測地線（二点間の最短距離をもたらす径路）の理論が，ほとんど無意味になって

しまうのである。つまり，彼らは「公理体系としては，正常 Riemann 空間論で必要充分であるはず」と主張した。

相対論の「成功」とともに，これら反対者の声は，弱々しくなって行き，ついには，異常 Riemann 空間論も，純粋数学者の重要な研究テーマになってしまった。私は，純粋数学はあまり得意ではないが，異常 Riemann 空間論には，何か「うさんくささ」を感じる。「光路上の無限遠方の過去までの距離がゼロである。」という主張には文学的ロマンを感ずるが，物理学的に容認しがたい。最近の，私の論文のシリーズを編む，動機のひとつとして，物理学から異常 Riemann 空間を追放することがあることは確かである。

前述の疑問に答えるためには「Einstein は基本テンソルでないものを基本テンソルとして誤認した。」という案があり，本論文でも登場する。

しかし，本論文の主要な目的は，Einstein の誤りを追求することではなく，あくまでもひとつの試みとして Yilmaz の理論を正常 Riemann 空間に展開したらどうなるのかを論ずるの点にある。

2. Einstein の理論と Yilmaz の1958年理論の相異点

ここでは，Einstein の重力場の理論と，Yilmaz の1958年理論（それは，もちろん異常 Riemann 空間で展開されている）の相異点を，明らかにする。（表1参照）

私が Yilmaz の1958年理論をそうとは知らず「再発見」したのはかなり古いが，[3] それが Einstein の物理哲学にそぐわないことを，はっきりと認識したのは，ごく最近である。私が Einstein の理論とは異なる理論について試行錯誤をはじめたのは，かなり古いのではあるが，最近まで Yilmaz の1958年理論は，Einstein の重力場理論のちょっとした手なおしだと考えていた。

歴史的には，もちろん Einstein の理論が先行するのであるが，説明の都合上 Yilmaz の理論の方を先にとりあげる。

彼は，Newton の重力場に関する三次元のスカラ方程式を，すなおに四次元に拡張し質量分布がゼロの領域で

$$g^{\mu\nu} \mathrm{D}_\mu \mathrm{D}_\nu f = 0 \tag{2. 1}$$

の形のスカラ波動方程式が成立していると考えた。（以後，テンソルの縮約に関する Einstein の省略記法[4] を採用する。）

ここで，D_μ は x^μ 座標に関する共変微分演算子であり，基本テンソル $g_{\mu\nu}$ は，空間部分の曲線直交座標系 x^μ 軸の測度係数を h_μ とすると

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{-2f}, & & & \mathbf{0} \\ & \mathrm{h}_1^2 e^{2f}, & & \\ & & \mathrm{h}_2^2 e^{2f}, & \\ \mathbf{0} & & & \mathrm{h}_3^2 e^{2f} \end{bmatrix} \tag{2. 2}$$

である。

理　論	場の源	基本量	基本方程式	質量密度	備　考
Einstein	エネルギテンソル	基本テンソル	Einstein の重力方程式	エネルギテンソルの時間-時間成分	幾何学的色彩がつよい
Yilmaz' 1958	質量分布	重力場のスカラ	4次元スカラ波動方程式	4次元スカラ	重力場のスカラは指数関数の形で基本テンソルにはいりこむ

表1　二つの重力場理論

Newton の重力方程式は

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho \tag{2. 3}$$

ただし　Φ：Newton の重力場のスカラ
　　　　G：万有引力の定数
　　　　ρ：質量密度

である。

Φ と f の対応関係は，球対称の静動力場を考え，Schwarzschlid の解を参考にすると自明である。c を真空中の光速度として，

$$f = -\frac{\Phi}{c^2} \tag{2. 4}$$

となる。∂_μ を x^μ に関する偏微分演算子とすると
(2. 1) 式は Riemann 幾何学の公式より

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu f) = 0 \tag{2. 5}$$

ただし

$$g = \det(\mathrm{Mat}(g_{\mu\nu})) \tag{2. 6}$$

である。(g は，$g_{\mu\nu}$ の作る行列の行列式)[4]
ここで，$g_{\mu\nu}$ の3次元空間部分をぬきだし ${}_3g_{\mu\nu}$ とすると

$${}_3g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_1^2, & & \mathbf{0} \\ & \mathrm{h}_2^2, & \\ \mathbf{0} & & \mathrm{h}_3^2 \end{bmatrix} e^{2f} \tag{2. 7}$$

重力場のない場合は

$${}_3g_{0,\mu\nu} = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_1^2, & & \mathbf{0} \\ & \mathrm{h}_2^2, & \\ \mathbf{0} & & \mathrm{h}_3^2 \end{bmatrix} \tag{2. 8}$$

ここで tine-independent case ($\partial_0 = 0$) の場合は，(2. 5) 式は，

$$\frac{1}{e^{2f}\sqrt{{}_3g_0}}\sum_{\mu=1}^{3}\partial_\mu(\sqrt{{}_3g_0}\, e^{2f}\, {}_3g_0^{\mu\nu} e^{-2f}\partial_\nu f) = 0 \tag{2. 9}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{{}_3g_0}}\sum_{\mu=1}^{3}\partial_\mu(\sqrt{{}_3g_0}\, {}_3g_0^{\mu\nu}\partial_\nu f) = 0 \tag{2. 10}$$

ただし，

$${}_3g_0 = \det(\mathrm{Mat}({}_3g_{0,\mu\nu})) = \mathrm{h}_1\mathrm{h}_2\mathrm{h}_3 \tag{2. 11}$$

であるので (2. 10) 式は

$$\nabla^2 f = 0 \tag{2. 12}$$

に等しい。

したがって，一般の場合は，4次元時空において (2. 1) 式は

$$g^{\mu\nu}\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu f = \frac{4\pi G}{c^2}\rho e^{-2f} \tag{2. 13}$$

となりそうであり，私もそう信じた[3]が，すでに文献(1)で述べたとおり，Yilmaz の1958年理論は，$\partial_0 \neq 0$ の場合数学的に矛盾があるので，簡単ではない。

いずれにせよ Yilmaz の理論では，拡張された Newton のスカラ方程式が重力場の基本方程式である。この式 ((2. 1)式) を Newton-Yilmaz の方程式，略してＮＹ方程式を呼ぶことにする。

Yilmaz は，$c = 0$ と言う特殊な座標系を用いているが，物理哲学的考察により，測地線の方程式より得られる結果は，Einstein の理論（具体的には Schwarzschild の解にもとづく結果で

あろう）と同じであると結論づけている。

一方 Einstein は Newton のスカラ方程式の拡張を途中でとりやめ，天才的と言われる発想にもとづき，重力の基本方程式は下式であると考えた。[5]

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=\kappa T_{\mu\nu} \tag{2. 14}$$

ここで，

$R_{\mu\nu}$ ：Ricci のテンソル

R ：Riemann 空間の曲率

$T_{\mu\nu}$ ：場の源となるエネルギテンソル

κ ：Einstein の重力定数 $\left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)$

である。（なお，いわゆる宇宙項は，ここでは省した。）

（2. 14）式は重力場に関する Einstein の方程式と呼ばれる。以後Ｅ方程式と略す。

ここで $R_{\mu\nu}$, $R(=R^{\mu}_{\mu})$ は，基本テンソルの関数である。[1] Einstein の考えによれば，エネルギテンソル（物質の分布…Einstein の理論においては,重力場以外のものは物質である。このことは，重力場自体は，独自のエネルギを持たないことを意味する）が与えられて，はじめて（2. 14）式の左辺の各量，したがって，それに含まれる基本テンソルが定まるのである。したがって，いたるところ空虚な（すなわちエネルギテンソル＝0）大域的座標系はあり得ない。これは Mach の哲学にも関係してくるが，Einstein の物理哲学によると「まず，宇宙全体に大域的座標を張りめぐし，しかる後，あちこちに物質を配置する」ことは，不可能なのである。（私の意見によれば，これはすこし哲学に凝りすぎている。）

一方，Yilmaz の理論は，ＮＹ方程式を採用したために，原理的にＥ方程式は必要ではない。彼は Rieamann 空間の曲率Ｒを f の関数として計算し，これを Lagrangean として，エネルギテンソル $T_{\mu\nu}$ を導いた。さらに，$g_{\mu\nu}$ から $R_{\mu\nu}$, R を計算し，別々に導いたＥ方程式の右辺と左辺が等しいことを確認し，自分の理論が，この点で Einstein の理論と等価であると考えた。

しかし，文献(1)で述べたことに関連するが，それはまず time-indenpendent case（$\partial_0=0$）でかつ，特殊な場合（たとえば，球対称な質量分布…この場合（x^0, x^1, x^2, x^3）＝（x^0, r, θ, φ）系を考えると，$\partial_0, \partial_2, \partial_3=0$ である）に限られる。実際には Yilmaz 型の基本テンソルをＥ方程式の左辺に代入し

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{\kappa}(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) \tag{2. 15}$$

とすると，一般には $T_{\mu\nu}$ は f の二次偏微係数までを含む，非常に複雑な式となる。

すなわち，Yilmaz の理論は Einstein の理論とは「そりがあわない。」のである。なお（2. 15）のような逆算（右辺を計算し左辺に代入する）は，Einstein の物理哲学に反し，Einstein 派からは反感をもって迎えられるようである。（原因と結果が逆であるから）しかし，$g_{\mu\nu}$ の試行解を仮定する事は，彼等もしばしば実行しており，そうであれば（2. 15）のごとき計算は格別変ではないのであるが，いかがなものか？

［注］文献(1)において，曲率Ｒを Lagrangean として作用積分

$$S=\int R\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{N 1}$$

を作り，汎関数として $g^{\mu\nu}$ を採用すると，Ｓの変分 δS に関して

$$\delta S=0 \tag{N 2}$$

より Einstein の Tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \tag{N 3}$$

が得られると書いたが，これはまちがいである。R は $g^{\mu\nu}$ の陽関数であるために，一般には

$$\frac{\partial R}{\partial g^{\mu\nu}} \neq 0 \tag{N 4}$$

であるから，エネルギテンソルの式は単純には計算できない。（Einstein は $G_{\mu\nu}$ を別の方法で求めている。）

例外的に

$$\frac{\partial R}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \tag{N 5}$$

のとき，

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \tag{N 6}$$

となる。

この式は，$T_{\mu\nu} = 0$ の場合のＥ方程式であり Schwarzschild の解が，まさにこれにあたる。（N 6）式の指標のひとつを上げて縮約すれば

$$R = 0 \tag{N 7}$$

が得られる。これを（N 6）式に再び代入すれば

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{N 8}$$

である。

Schwarzshild の解は，球対称の質量分布が原点付近に存在するとき，分布質量の外側の空間の基本テンソルを求めたものであるが，その空間では（N 7），（N 8）式が成立している。

一方，Yilmaz の理論では，この領域では

$$f = \frac{GM}{c^2 r} \tag{N 9}$$

M：原点付近の球対称に分布する質量の積分値

である。（N 9）式と（2. 2）式より $R_{\mu\nu}$, R は容易に計算できるが

$$\left.\begin{array}{l} R_{\mu\nu} \neq 0 \\ R \neq 0 \end{array}\right\} \tag{N 10}$$

である。これら $R_{\mu\nu}$, R のを（2. 15）に代入して $T_{\mu\nu}$ を計算するのは，前述のごとくに問題があるのであるが，ともかく実行すれば

$$T_{\mu\nu} \neq 0 \tag{N 11}$$

である。

一方，Lagrangean 関数を R として，通常の Lagrange 解析を行うと，Yilmatz の試行した特殊な場合は，エネルギーテンソルとして，（2. 15）式に R と $R_{\mu\nu}$ を代入したものと同じ値が得られた。これで Yilmaz は，自分の理論が Einstein の理論と数式的に等価であると考えた。しかし，重力場が独自にエネルギテンソルに寄与することは Einstein の物理哲学には反することは明白である。

なお，任意定数を含む基本テンソル $g_{\mu\nu}$ の試行解を（2. 15）式に代入して，$T_{\mu\nu} = 0$ を実現する様，任意定数を決定することは，著るしく困難である。これを企だてて，最初に成功したのが前述の Schwarzschild なのである。　［注］終り

Yilmaz の最初の論文[6] においては，彼は前述の Einstein の理論と彼の理論のきわだったちがいを強くは主張していない。これは，彼が気がつかなかったためとは考えられず，当時の彼のお

かれた環境によるものであろう。(大学院の学生か？)

Yilmaz の理論を，私流に解釈すると「まず座標系があり，基本テンソルが定まっている。その基本テンソルには，簡単な形（指数関数）で，重力場のスカラ関数が含まれている。そして，そのスカラ関数は，ＮＹ方程式の解である。」と言うことになる。ＮＹ方程式には，基本テンソルと基本テンソルの行列式が含まれているから，あきらかに堂々巡りであり，かつ一般には f に関して非線形である。どこか，調和のとれたところで f が定まる形になっている。

しかし，この案は，先験的に重力場のない大域的座標系の存在を想定していると言う印象を与える。

実際に，私も文献(3)に関する講演で追求された。「絶対静止系のにおいがする。」と言うのである。1958年においても，1979年においても，そして1995年においても，これはこの理論の弱点と見なされる。

この理論を，正常 Riemann 空間に適用すると，この「弱点」は，ますます明白となる。

しかし，私に逆に絶対静止空間のようなものが，存在してもよいという考えに至った。

3. 正常 Yilmaz 時空

文献(1)において，数学的に無矛盾でありかつ，太陽系の太陽の外部程度の比較的弱い重力場における観測事実（これは，遠方の銀河や準星から得られた観測事実よりは，はるかに精度がよいはずである）を説明するためには，Yilmaz の理論は，次のごとくに修正すべきであることを示唆した。

すなわち我々の時空は正常 Riemann 空間であり，その基本テンソルは

$$\zeta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} exp(2f), & & & \mathbf{0} \\ & \mathrm{h}_1^2 exp(2f), & & \\ & & \mathrm{h}_2^2 exp(2f), & \\ \mathbf{0} & & & \mathrm{h}_3^2 exp(2f) \end{bmatrix} \qquad (3.\ 1)$$

である。なお，e^{2f} を $exp(2f)$ とかきなおした。

重力場をとり去った座標系を枠座標系（文献(1)では，がいこつ座標系と呼んだもの）とすると，その基本テンソルは

$$\zeta_{0,\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1, & & & \mathbf{0} \\ & \mathrm{h}_1^2, & & \\ & & \mathrm{h}_2^2, & \\ \mathbf{0} & & & \mathrm{h}_3^2 \end{bmatrix} \qquad (3.\ 2)$$

である。すなわち，$\zeta_{\mu\nu}$ は $\zeta_{0,\mu\nu}$ とスカラ $exp(2f)$ の直積となっている。

$$\zeta_{\mu\nu} = \zeta_{0,\mu\nu} exp(2f) \qquad (3.\ 3)$$

ここで注意すべきことは，(3. 2) 式を見れば，この座標系は曲線直交座標系であるが，この系が Lorentz 変換を受けると，もはや直交座標系ではなくなる。すなわち，時間軸とデカルト的空間軸のひとつ（移動方向の軸）が斜交する。すなわち，座標系には静止系と移動系の二種類があることになる。

静止系とは Newton の考えた絶対静止系とは異なり，膨張する宇宙に無限個存在する。そしてそれは，Einstein の慣性系の概念ときわめてよく似たものである。移動系とは，Einstein が，見おとしていた慣性系であり，彼が見おとした理由は，当初彼は宇宙が一様に膨張しているように見えることを知らなかったからである。あとで彼が，このことを知らされたとき，彼はＥ方程式の不安定解の存在理由が得られたと言うことで安心し，慣性系を再検討することを失念してしまった。この「慣性系には静止系と移動系の区別がある。」と言うことは，宇宙が膨張していれ

ば，時空が異常 Riemann 空間であろうとなかろうと，必然的な結論である。[7]

文献(7)の要旨を，正常 Riemann 空間に書きおなしたものを附録[I]に揚げる。

$\zeta_{\mu\nu}$ より，この時空の曲率を計算すると[1]

$$R = -6(\zeta_0^{\mu\nu} D_{0,\mu} D_{0,\nu} f + \zeta_0^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f) exp(-2f) \qquad (3.4)$$

ただし

$D_{0,\mu}$ ： x^μ 座標に関する枠座標系の共変微分演算子

である。

(3. 4) 式を観察すれば，重力場のスカラのみたすべき，基本方程式は枠座標系で成立するのではないかとの考えに至る。

すなわち，質量密度のない領域で

$$\zeta_0^{\mu\nu} D_{0,\mu} D_{0,\nu} f = 0 \qquad (3.5)$$

偏微分演算子のみで，具体的に表現すれば

$$\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}_0}} \partial_\mu (\sqrt{\ddot{\zeta}_0}\, \zeta_0^{\mu\nu} \partial_\nu f) = 0 \qquad (3.6)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \det(\mathrm{Mat}(\zeta_{\mu\nu})) \\ \zeta_0 &= \det(\mathrm{Mat}(\zeta_{0,\mu\nu})) \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

（$\sqrt{\ddot{\zeta}_0}$, det, Mat については文献(1)参照）

しかし，1984年にこの案を Yilmaz に示したところ，彼ははげしく反対した。(3. 5) 式（つまり (3. 6) 式）には波動解がないと言うのである。これは，重力場が近接作用の場ではなく，遠隔作用の場であることを意味する。その時は，この議論はそれで終りとなったが，すでに私には別の案があった。それを，私が Yilmaz に明言しなかったのは，実は当時，私は重力場は，ことによると遠隔作用の場かも知れないと考えていたのである。（いまだもって重力波は，受信されていない。重力波の存在を示す観測データはすべて間接的なものである。）

しかし，Yilmaz の要請には，答えることができる。

静止系において

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{\mu 0} &= 0 \quad (\mu = 1, 2, 3) \\ \zeta_{0\nu} &= 0 \quad (\nu = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

のような座標系を選ぶことができるとき，その系において，次のごとき混合テンソルを定義する。

$$\Delta_\nu^{\ \mu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

このとき，次のごときテンソルを定義できる。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \zeta_{\mu\rho} \Delta_\nu^{\ \rho} \\ &= \zeta_{\rho\nu} \Delta_\mu^{\ \rho} \end{aligned} \qquad (3.10)$$

この $\Delta_\nu^{\ \mu}$ を静止系時間転反転テンソルと名づける。[8]

また

$$\begin{aligned} g_{0,\mu\nu} &= \zeta_{0,\mu\rho} \Delta_\nu^{\ \rho} \\ &= \zeta_{0,\rho\nu} \Delta_\mu^{\ \rho} \end{aligned} \qquad (3.11)$$

である。

この $g_{\mu\nu}$ が Einstein が，基本テンソルと見あやまったものではないかと考え，Einstein の擬似基本テンソルと名づける。[8]

これにより，Maxwell の方程式も，波動方程式も，すべて説明できる。[8]

(3. 5) 式に代わるべき式は

$$g_0^{\mu\nu} \mathrm{D}_{0,\mu} \mathrm{D}_{0,\nu} f = 0 \tag{3. 12}$$

具体的には

$$\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}_0}} \partial_\mu (\sqrt{\ddot{\zeta}_0}\, g_0^{\mu\nu} \partial_\nu f) = 0 \tag{3. 13}$$

なお，次の式

$$g_0 = \det(\mathrm{Mat}(g_{0,\mu\nu})) \tag{3. 14}$$

は，不要であることを留意されたい。(すなわち $g_{0,\mu\nu}$ は基本テンソルではないのである。)

(3. 12) 式が，いかなる Lagrangean から変分法によって得られるかは後述する。

Lorentz 変換によって $\zeta_{\mu\nu}$, $\zeta_{0,\mu\nu}$, $\Delta_\nu^{\ \mu}$ は形を変えるが（空間軸をデカルト座標系に選ぶと）$g_{0,\mu\nu}$ は不変である。しかし，基本テンソルはあくまでも $\zeta_{\mu\nu}$ であることを強調しておく。

$\zeta_{\mu\nu}$ を異常 Riemann 空間に書きかえた直積型基本テンソルは，Yilmaz は検討ずみであった。しかし，これ（文献(1)の $g_{\mu\nu}$）は，弱い重力場に関する観測事実を説明できないから，彼は発表しなかったようである。(曲率がスカラであることと，f がスカラであることとの間の数学的矛盾はない。)[(1)]

さて (3. 12) つまり (3. 13) 式は，いかなる Lagrangean より得られるか？　我々は，E 方程式をすててしまった。したがって，もはや曲率 R を Lagrangean にする積極的意義はなくなった。(重力場は，空間の幾何学的構造とは，そんなに密接ではないと言うことを意味する。)

ここで，Lagrangean として

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= g^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f\, exp(-2f) \\ &= g_0^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f\, exp(-4f) \end{aligned} \tag{3. 15}$$

を採用しよう。

作用積分を下記のものとする。

$$\mathrm{S} = \int \mathrm{L} \sqrt{\ddot{\zeta}}\, d\Omega \tag{3. 16}$$

($\sqrt{\ddot{\zeta}}$ は，$\sqrt{\zeta}$ に座標の符号をつけたもの。$\sqrt{\ddot{\zeta}}$, $d\Omega$ ともに文献(1)参照)

$$\delta \mathrm{S} = 0 \tag{3. 17}$$

とすると Euler の方程式は

$$\partial_\mu \frac{\partial(\mathrm{L}\sqrt{\ddot{\zeta}})}{\partial(\partial_\mu f)} - \frac{\partial(\mathrm{L}\sqrt{\ddot{\zeta}})}{\partial f} = 0 \tag{3. 18}$$

(3. 15) 式より

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\sqrt{\ddot{\zeta}} &= g_0^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f\, exp(-4f) \sqrt{\ddot{\zeta}_0}\, exp(4f) \\ &= g_0^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f \sqrt{\ddot{\zeta}_0} \end{aligned} \tag{3. 19}$$

したがって (3. 18) 式の第 2 項はゼロである。

$$\therefore \quad \partial_\mu \frac{\partial(g_0^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f \sqrt{\ddot{\zeta}_0})}{\partial(\partial_\mu f)} = 0 \tag{3. 20}$$

$$\therefore \quad \partial_\mu (\sqrt{\ddot{\zeta}_0}\, g_0^{\mu\nu} \partial_\nu f) = 0 \tag{3. 21}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}_0}} \partial_\mu (\sqrt{\ddot{\zeta}_0}\, g_0^{\mu\nu} \partial_\nu f) = 0 \tag{3. 22}$$

$\sqrt{\ddot{\zeta}_0}$ が分母と分子にあらわれるので，この場合は $\sqrt{\zeta_0}$ と書いてもさしつかえないが，理論的整合性より，座標系の符号を含んでいることを示す二つのドットをつけておくことにする。

このように，正常 Riemann 空間に修正された Yilmaz の重力場理論は，完全に線形化された。我々は，ほとんどすべての場合，非線系の偏微分方程式の一般解は，ないことを思いおこすべき

である。すなわち，物理学の基本式は，線形化できれば，その方がよいに決まっている。

質量分布 ρ のある場合は

$$g_0^{\mu\nu}\mathrm{D}_\mu \mathrm{D}_\nu f = \frac{4\pi \mathrm{G}}{c^2}\rho \tag{3. 23}$$

すなわち

$$\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}_0}}\partial_\mu(\sqrt{\ddot{\zeta}_0}\, g_0^{\mu\nu}\partial_\nu f) = \frac{4\pi \mathrm{G}}{c^2}\rho \tag{3. 24}$$

となるように思われるが，この式をもたらす Lagrangean は不明である。Lagrangean が，わからないと従来の方法では，エネルギーテンソルが決定できない。Yilmaz は（異常 Riemann 空間の段階で）質量密度のデルタ関数分布を採用しているが，デルタ関数を原点におくと，全エネルギが発散するという問題が生ずる。もし，デルタ関数を採用するのであれば，中心より有限距離はなれたところにおくべきである。（球かく分布）デルタ関数のある部分は，変分法の対象外である。

ここで注意すべきことは，ρ はミクロな量であって，マクロな量ではないことである。Newton のスカラ方程式にあらわれる ρ は，現在では質点の分布密度と解せられる。一方，ＮＹ方程式は（現代物理学の見地から言うと非常識であるが）ミクロな粒子の式である。（Yilmaz の1958年の論文もそのつもりである）だから，太陽の外部の重力場を出すときは，それなりの注意が必要である。

微小体積要素は，共変ベクトルであるから，マクロなスカラ質量をＭとした場合

$$\mathrm{M} = \int_{\mathrm{V}} \rho d\mathrm{V}_\mu \tag{3. 25}$$

という式は，あり得ない。

太陽の総質量Ｍは，次のようにして定まる。太陽は，各種の質点でできているが，簡単のため一種の質点でできているものとする。

太陽の外部の座標 x^μ における重力スカラ関数は，総和をとる操作を Σ と書いて

$$\mathrm{F}(x^\mu) = \Sigma f(x^\mu, x'^\nu) \tag{3. 26}$$

総和は，太陽内全域でとられる。なお x'^ν は源の粒子の座標である。

スカラの和はスカラであるので，Ｆも 4 次元スカラである。

Ｆが 4 次元スカラであることが確認できたので，Ｆを求める計算法自体は，座標変換に共変的である必要はない。（電磁場のたて方向成分は，テンソルの成分である。これを，スカラと見なして波動方程式をとき，それを Maxwell の方程式に代入して，電磁場のテンソル量を定めることが，ふつうに行われている。この導出法自体は，一般の座標変換に対して共変的ではないが，得られた電磁場のテンソル量は常に正しい。前述の話は，これと似たような事情にある。）

粒子の存在密度（これは座標の関数であってよい。）を n 個／㎥とする。スカラＦを計算する座標系における微小体積 $d\mathrm{V}$ に含まれる粒子にもとづく微小重力スカラは

$$d\mathrm{F} = n(x'^\nu)f(x^\mu, x'^\nu)d\mathrm{V} \tag{3. 27}$$

$$\therefore\quad \mathrm{F}(x^\mu) = \int_{\mathrm{V}} d\mathrm{F}$$

$$= \int_{\mathrm{V}} n(x'^\nu)f(x^\mu, x'^\nu)d\mathrm{V} \tag{3. 28}$$

静的（$\partial_0 = 0$）の場合の（3. 22）式の球対称解は

$$f = \frac{\mathrm{G}m}{c^2 r} \tag{3. 29}$$

ここで，m は粒子の質量である。この式で見るかぎり，m は重力場のスカラの振幅に比例する定数である。（総エネルギーを c^2 で割ったものとは断定できない。…そもそもエネルギーは，

Einstein によればスカラではない。)

以上より，従来の理論が，そのまま使用できて，球対称分布の場合，質量分布の外部で

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{GM}}{c^2 r} \tag{3. 30}$$

ここで，r は粒子と観測点の距離ではなく，球状分布する粒子群の中心と観測点の間の距離である。Newton の重力方程式（2. 3）の右辺にある ρ を ρ_{N} と書くこととすると

$$\rho_{\mathrm{N}} = n(x'^{\mu})m \tag{3. 31}$$

であると考えられる。

（3. 28）を得た過程より

$$\mathrm{M} = \int_{\mathrm{V}} n(x'^{\nu})m d\mathrm{V} \tag{3. 32}$$

は明白である。

ここで，（3. 28）（3. 32）式は，一般座標変換に共変でないことを確認しておこう。しかし，それにもかかわらず前述したごとくに（3. 30）は正しい4次元スカラ式である。

太陽を構成する粒子の種類が多いことは手続きを若干複雑にするだけで本質的な困難性を生じない。それよりも粒子が運動していることが問題である。Einstein の理論では，粒子が移動していようが静止していようがスカラは不変である。各々が静止している空間で f であれば，他の空間でも f であることは変わりない。

しかし，静止系と移動系の区別をみとめると，移動している粒子のスカラ関数が，静止しているものと全く同じとは断定できない。この様に静止系の仮定は，新しい問題を生じるが，ここでは，粒子の移動速度が，光速に比して充分小さいとして（3. 28)，（3. 30）が，よい近似式であると指摘しておこう。(実際にこの式は，太陽系の内部において，よく観測事実にあう。)

したがって，太陽付近の測地線の方程式を計算するときは，球座標系（x^0, r, θ, φ）において

$$\zeta_{\mu\nu} = \zeta_{0,\mu\nu} exp\left(\frac{2\mathrm{GM}}{c^2 r}\right)$$

として計算すればよい。

測地線の方程式については，次の機会に論じる。

なお，ρ_{N} と（3. 23)，（3. 24）の ρ とは異なる性質のものである。ρ_{N} を用いると，質量分布の内部の解も得ることができるが，この解は，「粒子群の存在する領域中ではあるが，粒子の外部の空間」におけるスカラ重力場の値である。

4. エネルギテンソル

ここで，正常 Yilmaz 時空のエネルギテンソルを決定しよう。$g^{\mu\nu}$ は，基本テンソルではないから，エネルギテンソルを導出するときの汎関数とは考えにくい。エネルギテンソルを出す過程には，空間の基本テンソルをすこし「ゆすって」みて，ひびきぐわいを判定すると言う操作が含まれているので，やはり汎関数は $\zeta^{\mu\nu}$ であるべきである。

まず，質量分布の外部のエネルギテンソルをもとめよう。

$$\begin{aligned}\mathrm{L} &= g^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu f exp(-2f) \\ &= \zeta^{\mu\nu}\Delta_\nu^{\ \rho}\partial_\mu f \partial_\rho f exp(-2f)\end{aligned} \tag{4. 1}$$

エネルギテンソルの理論より[9]

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\left\{\frac{\partial(\mathrm{L}\sqrt{\ddot{\zeta}})}{\partial\left(\dfrac{\partial\zeta^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\right)} - \frac{\partial(\mathrm{L}\sqrt{\ddot{\zeta}})}{\partial\zeta^{\mu\nu}}\right\} \tag{4. 2}$$

あきらかに，中かっこ内の第 1 項はゼロである。

$$\therefore \quad \mathrm{T}_{\mu\nu} = -2\partial_\mu f \partial_\rho f \Delta_\nu^{\ \rho} exp(-2f) - \frac{2}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta^{\mu\nu}}(\sqrt{\ddot{\zeta}})\right\}\zeta^{\alpha\rho}\Delta_\rho^{\ \beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f exp(-2f) \qquad (4.\ 3)$$

Riemann 幾何学の公式により(10)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\zeta^{\mu\nu}} = -\zeta\zeta_{\mu\nu} \qquad (4.\ 4)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial\sqrt{\ddot{\zeta}}}{\partial\zeta^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\frac{\partial\zeta}{\partial\zeta^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\frac{\zeta}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\zeta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{\ddot{\zeta}}\,\zeta^{\mu\nu} \qquad (4.\ 5)$$

$$\therefore \quad \mathrm{T}_{\mu\nu} = -2\partial_\mu f \partial_\rho f \Delta_\nu^{\ \rho} exp(-2f) + \zeta_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f exp(-2f) \qquad (4.\ 6)$$

この式にある $exp(-2f)$ という「バイアス」の意味は後に判明する。

(4.6) 式をみると，物質が全く存在せず，重力場のみが存在する空間で

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} \fallingdotseq 0 \qquad (4.\ 7)$$

である。これは，すでに Yilmaz の当初の理論からそうであった。したがって，Yilmaz は Schwarzschild の解を，重力場の厳密解とは認めない。それは，弱い重力場に関する近似解である。以下は，私の意見であるが，いわゆるブラックホールは，近似解の近似の精度がどんどん悪くなるところまで，近似解を強引に適用したため出現した妖怪である。

(4.6) 式は，1958年に Yilmaz が発表したものと，本質的に同じである。ただ，正常 Riemann 空間に書きなおし，基本テンソルを直積型にしただけである。したがって，これを Yilmaz 型のエネルギテンソルと呼ぶのは適切であろう。デルタ関数型質量分布を，どこにおくか問題であるが，ブラックホールは存在しない。

5. 積分によるマクロな物理量への変換に関する Landau の要請

前章までの解析によって，正常 Riemann 空間内に（質量分布の外部領域ではあるが），Yilmaz の1958年理論を書きかえることができた。

その理論は，当初から，Einstein の物理哲学に反するものであったが，私により，さらに，正常 Riemann 空間という，別の「違反」が加わった。

これらは，現在の古典物理学の体制においては，致命的な欠陥と考えられる。しかし，以下において，前章でもとめた Yilmaz 型エネルギテンソルが，きわめて合理的である事を示そう。

エネルギテンソルは微分量であり，これを積分しなければ，我々の知っている粒子のエネルギや運動量とはならない。不幸にもまだ，理論が不完全なので，質量分布の外部の解のみであるが，この理論では，外部においても

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} \fallingdotseq 0 \qquad (5.\ 1)$$

なので，マクロな量を求める積分範囲は，外部も含むことになる。

通常，積分は，次のごとくに行なわれる。（理論家によっては，この辺があいまいな書物もあるが，きちんと書くべきである。）

$x^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ 座標系において，次の三つの微小ベクトルを定義する。

$$\left.\begin{aligned} du^{\mu} &= (0,\ dx^1,\ 0,\ 0) \\ dv^{\mu} &= (0,\ 0,\ dx^2,\ 0) \\ dw^{\mu} &= (0,\ 0,\ 0,\ dx^3) \end{aligned}\right\} \tag{5. 2}$$

x^{μ} 系は，静止座標系に選ぶべきであろう。なお，静止系であっても，座標変換を行えば，一般には，これらの微小ベクトルは入りまじってしまい（5.2）式のように簡単にはならないが，それにもかかわらず，以下に述べる積分法は，一般座標変換に関して，共変的形をしている。

三次元の微小体積要素 dV_{μ} は，共変的 Levi-Civita の記号を e_{ijkl} として

$$dV_{\mu} = \sqrt{\ddot{\zeta}}\, e_{\mu\nu\rho\lambda}\, du^{\nu} dv^{\rho} dw^{\lambda} \tag{5. 3}$$

なお，正常 Riemann 空間においては $e_{\mu\nu\rho\lambda}$ の前に負号は不要である。(付録Ⅱ参照)

したがって，この系内の三次元領域Ｖ内のマクロな，エネルギ運動量ベクルト P_{μ} は

$$P_{\mu} = \frac{1}{c}\int_{V} T_{\mu}{}^{\nu} dV_{\nu} \tag{5. 4}$$

但し，エネルギＵが

$$U = cP_0 \tag{5. 5}$$

となるように $\dfrac{1}{c}$ の係数を付加した。

一方，一般に（4.2）式で求めたエネルギテンソルは

$$D_{\nu} T_{\mu}{}^{\nu} = 0 \tag{5. 6}$$

なる特性を持つ。この特性が，(5.4) 式の P_{μ} がベクトルとなることを保証するように見えるが，実はそうではない。

L. D. Landau は，P_{μ} が保存する，すなわち積分量としても，やはりベクトルの性質をもつためには，(5.6) 式だけでは不充分で，通常の発散の式

$$\partial_{\nu}(\sqrt{\ddot{\zeta}}\, T_{\mu}{}^{\nu}) = 0 \tag{5. 7}$$

が，成立しなければならないことを示した。(なお，$\sqrt{\zeta}$ の代りに $\sqrt{\ddot{\zeta}}$ を入れたのは，私の独断である。この式は右辺=0 なので，$\sqrt{\zeta}$ でもよいが，今までの議論の流れと整合させるため，あえて $\sqrt{\ddot{\zeta}}$ とする。)

Landau が，最初に，これに気付いたのかどうか不明であるが，一応「Landau の要請」と呼んでおく。Landau と Lifshitz は，このむずかしい話を，いつものように，さりげなく簡単にしか述べていないが，(12) 問題は，曲線座標系における数学的な部分にあり，特定の物理哲学によってもたらされたものではなく，疑問の余地はない。

一見すると (5.6) 式が成立すると

$$\frac{1}{\sqrt{\ddot{\zeta}}}\partial_{\nu}\{\sqrt{\ddot{\zeta}}\,(T_{\mu}{}^{\nu})\} = 0 \tag{5. 7}$$

も成立しそうであるが，重力場があってもこの二つの式が等価なのは，小かっこの中が，反変ベクトルか，２階の反対称テンソルの場合にかぎられることに留意されたい。

この Landau の要請をみたすために，$T_{\mu}{}^{\nu}$ にテンソルではないある量 $t_{\mu}{}^{\nu}$ をつけ加えようとする試みが，さかんに試行された。

すなわち

$$\partial_{\nu}\{\sqrt{\ddot{\zeta}}\,(T_{\mu}{}^{\nu} + t_{\mu}{}^{\nu})\} = 0 \tag{5. 8}$$

となるような $t_{\mu}{}^{\nu}$ を求めて，$T_{\mu}{}^{\nu} + t_{\mu}{}^{\nu}$ を積分の対象にしようとする試みである。

(5.8) 式は，テンソル式ではないにもかかわらず，$T_{\mu}{}^{\nu}$ は，厳然としてテンソルであるので，$t_{\mu}{}^{\nu}$ は，テンソルにはなりえない。

その上，困ったことに，$t_{\mu}{}^{\nu}$ は，論者によって，いろいろ求められ，一意的には，今のところ

定められない。この $t_\mu^{\ \nu}$ を energy-momentum complex とか，energy-momentum pseudo tensor と呼ぶ。

しかし，そもそも，Einstein の理論体系にテンソル（一般には，テンソル密度）以外のものを持ちこむのは，無理な話なのである。彼の「一般相対論」が何であるか，論者によって狭くも広くもなるが，その中の重要な要請，「すべての物理量は，座標変換に共変なテンソル（もっと一般にはテンソル密度）で表現でき，物理公式は，同じく，共変なテンソル式でならねばならない。」ことに反する。（私は，この Einstein の要請は正しいと信じている。）

そもそも，Landau の要請は何であるのか？　私は，これは電気磁気学の初学者が，必ず学ぶ「ベクトルを積分するときは，同じ方向の成分を対象にしなければならない。」と言う常識を，重力場のある場合に，テンソルに一般化したものであると主張する。

したがって，（5.7）式が成立するのは，一般には枠座標系が，4次元デカルト座標系であるときと考えるべきである。（この式をよく検討すれば，もっと範囲を広げることが可能であろうが，当初はデカルト系に限ることにする。）

Landau は，もちろん，電気磁気学の初歩の常識をもっていたにちがいないが，枠座標系と言う概念をもちあわせなかったために，このことに思いいたらなかったのではないであろうか？（枠座標系が，デカルト系であっても重力場が存在するときは，一般には affine 接続係数はゼロとならず，見とおしは非常に悪い。）

以下において，枠座標系をデカルト系とする。と言うことは，積分を行う系は静止系に限ることをも意味する。

このとき，

$$\zeta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} exp(2f), & & & \mathbf{0} \\ & exp(2f), & & \\ & & exp(2f), & \\ \mathbf{0} & & & exp(2f) \end{bmatrix} \tag{5. 9}$$

$$\zeta_{0,\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1, & & & \mathbf{0} \\ & 1, & & \\ & & 1, & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \tag{5. 10}$$

このとき，正常 Riemann 空間におけるＮＹ方程式は

$$-\partial_0^2 f+\partial_1^2 f+\partial_2^2 f+\partial_3^2 f = 0 \tag{5. 10}$$

以下において，表記法の簡単化のため

$$\left.\begin{array}{l} \partial_\mu f = f_\mu \\ \partial_\mu \partial_\nu f = f_{\nu\mu} \end{array}\right\} \tag{5. 11}$$

と書く。すなわち，ＮＹ方程式（5.10）は

$$-f_{00}+f_{11}+f_{22}+f_{33} = 0 \tag{5. 12}$$

Lagrangean L は（3.15）式より

$$\mathrm{L} = (-f_0^{\ 2}+f_1^{\ 2}+f_2^{\ 2}+f_3^{\ 2})exp(-4f)$$

（別に，Lagrangean 解析をやりなおすつもりはなく，$\mathrm{T}_\mu^{\ \nu}$ の中にこの項が含まれるために求めておいた。）

かくして，前章でもとめた Yilmaz 型エネルギテンソル $\mathrm{T}_\mu^{\ \nu}$ の式（4.6）より

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_\mu^{\ \nu} &= \zeta^{\nu\rho}\mathrm{T}_{\mu\rho} \\ &= -2f_\mu f_\rho \Delta_\lambda^{\ \rho}\zeta^{\nu\lambda} exp(-4f)+\delta_\mu^{\ \nu} g_0^{\ \alpha\beta} f_\alpha f_\beta exp(-4f) \end{aligned} \tag{5. 13}$$

ただし

$\delta_\mu^{\ \nu}$: Kronecker の delta

である。

$$\therefore\quad T_\mu^{\ \nu} = \begin{bmatrix} f_0^2+f_1^2+f_2^2+f_3^2, & -2f_0f_1, & -2f_0f_2, & -2f_0f_3 \\ +2f_1f_0, & -f_0^2-f_1^2+f_2^2+f_3^2, & -2f_1f_2, & -2f_1f_3 \\ +2f_2f_0, & -2f_2f_1, & -f_0^2+f_1^2-f_2^2+f_3^2, & -2f_2f_3 \\ +2f_3f_0, & -2f_3f_1, & -2f_3f_2, & -f_0^2+f_1^2+f_2^2-f_3^2 \end{bmatrix} exp(-4f) \quad (5.14)$$

また，

$$\sqrt{\zeta} = e^{4f} \quad (5.15)$$

より，$T_\mu^{\ \nu}\sqrt{\zeta}$ は，(5.14) 式の右辺から $exp(-4f)$ をとり去った形となる。

よって，$\partial_\nu(\sqrt{\zeta}\,T_\mu^{\ \nu})$ に関して，

$\mu=0$ の項を I_0 とすると

$$\begin{aligned} I_0 = {} & 2f_0f_{00}+2f_1f_{10}+2f_2f_{20}+2f_3f_{30} \\ & -2f_{01}f_1-2f_0f_{11} \\ & -2f_{02}f_2-2f_0f_{22} \\ & -2f_{03}f_3-2f_0f_{33} \end{aligned} \quad (5.16)$$

一般に，偏微分演算子は，順序を交換できるから

$$f_{\mu\nu} = f_{\nu\mu} \quad (5.17)$$

（これは，テンソルではないことに注意）

$$I_0 = 2f_0(f_{00}-f_{11}-f_{22}-f_{33}) \quad (5.18)$$

NY方程式 (5.12) より

$$\therefore\quad I_0 = 0$$

同様にして，$\mu = 1, 2, 3$ について

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= 2f_1(f_{00}-f_{11}-f_{22}-f_{33}) = 0 \\ I_2 &= 2f_2(f_{00}-f_{11}-f_{22}-f_{33}) = 0 \\ I_3 &= 2f_3(f_{00}-f_{11}-f_{22}-f_{33}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5.19)$$

かくして，

$$\partial_\nu(\sqrt{\zeta}\,T_\mu^{\ \nu}) = 0 \quad (5.20)$$

となり，Landau の要請はみたされた。

したがって，枠座標系がデカルト系で（かつ静止系）であれば，重力場が存在しても

$$P_\mu = \frac{1}{c}\int_V T_\mu^{\ \nu}\,dV_\nu \quad (5.4)(\text{再掲})$$

によって，運動量ベクルトを（energy momentum complex を導入することなく）決定できる。

6. まとめおよびその他の問題点

Yilmaz の1958年理論を，数学的矛盾がなく，かつ弱い重力場における観測事実にあうよう修正して，正常 Rienann 空間の理論に書きかえた。

正常 Riemann 空間ではあるが，波動方程式も存在し，Maxwell の方程式も問題なく成立する。

この重力場理論は，線形であるので，見とおしがよく，Landau の要請をみたし，energy-momenntum complex になやむ必要はない。

多数の問題が，未解決のまま残された。ひとつは，ミクロな質量分布は，どう扱うかという問題である。Lagrangean にこれに対応する項が導入できなければ，Yilmaz が1958年にめざした，空間積分によって粒子の質量や全エネルギを求めることはできない。

しかし，外部解が明解になったので，球状分布する質量系の外部の基本テンソルが，明確に求

められた。このことは，前記の問題を解決できなくとも，測地線の方程式の解法の検討に入り得ることを意味する。(これは，すでに部分的に発表している[13] 異常空間の場合を簡単に書きかえるだけでよいと言う見通しをもっている。)

第4章でもとめた Yilmaz 型エネルギテンソル $T_{\mu\nu}$ が，対称テンソルでないことは若干気がかりである。$T_{\mu\nu}$ を対称化するには，汎関数を Einstein の疑似基本テンソル $g^{\mu\nu}$ にえらぶか（これは基本テンソルではないから，この場合でもテンソルの指標の上げ下げは，あきらかに $\zeta_{\mu\nu}, \zeta^{\mu\nu}$ である)，重力場は，遠隔作用であると割りきるか，どちらかがさしあたり考えられる。

なお，ρ の問題のむしかえしになるが，エネルギテンソル論が，重力場だけで閉じてしまう必要があるのかも疑問点である。それはかえってまずく，すくなくとも重力場と電磁場の両方を同時に論じるべきかも知れない。

〔完〕

〔参　考　文　献〕

(1) 村田茂昭「四次元時空の基本テンソルと重力場の四次元スカラの関係について」—H. Yilmaz' 1958 理論の再検討— 札幌大学女子短期大学部紀要　第21号　pp. 21～28.　1992年3月.

(2) 池内　了「見過ごせぬ“疑似科学”出版」朝日新聞（夕刊）1993. 9. 2.（よく読むと，まことにもっともな主張であるが，事情にうとい読者は，うっかりするとたとえば「Einstein の理論に反する理論は，すべて邪説である。」と信ずる危険性を含む。）

(3) 村田茂昭「アインシュタインの方程式の新しい解と厳密な重力波動方程式」電気学会電磁界理論研究会資料　EMT-79-59　1979. 9. 28.

(4) 村田茂昭「Levi-Civita の記号と擬テンソルについて」札幌大学女子短期大学部紀要　第24号．1994年9月

(5) たとえば，平川浩正「相対論」(第2版) §6. 1　共立出版.

(6) H. Yilmaz “New Approach to General Relativity” Phys. Rev. Vol. 111, No. 5, Sept. (1958).

(7) 村田茂昭「Lorentz 変換の非 Einstein 的解釈」電気学会電磁界理論研究会資料　EMT-80-55　1980. 10. 8.（この論文の図は，きわめてわかりにくい。著者に請求すれば，新しい図を送呈する。著者住所〒062　札幌市豊平区西岡3条7－3－1　札幌大学女子短期大学部経営学科).

(8) 村田茂昭「電磁場に関する新理論」電気学会電磁界理論研究会資料　EMT-85-37　1985. 7. 25.

(9) たとえば，平川　§5. 2（異常 Riemann 空間で論じられているが，原理は同じである。）

(10) たとえば，平川　§4.

(11) たとえば，平川　§5.

(12) L. D. Landau／E. M. Lifshitz “The Classical Theory of Fields” 4th Revised English Edition　§96　PERGAMON PRESS.

(13) 村田茂昭「Yilmaz's 1958理論の再検討」電気学会電磁界理論研究会資料　EMT-83-24　1983. 10. 2.

付録〔Ｉ〕Lorentz 変換の非 Einstein 的解釈（正常 Rienmann 空間版）

§A 1. 1　膨張する宇宙と Hubble の法則

我々の宇宙は，一様に膨脹している様に見えると言うのが，現在の定説である。これは，遠方の銀河系からくる光のスペクトルの red shift を Doppler 効果であると考え，統計的データ処理をするとそうなるのである。すなわち，遠方の銀河系は，距離に比例した速度で，後退して行くように見える。この速度を v，銀河までの距離を R とした場合

$$v = H_0 R \tag{1}$$

と書いて H_0 を Hubble の定数と呼ぶ。R はふつう（角度に由来する）parsec (pc と略す) という単位で表現される。

$$1\ \mathrm{pc} \fallingdotseq 3.26\ 光年 \tag{2}$$

であり，

$$H_0 = 60\,\text{km/ sec /M pc} \tag{3}$$
$$(\because\ \ \text{M} = 10^6)$$

程度であると考えられている。(統計的ばらつきが多く，1桁半位しか有効数字がない。) H_0 の逆数は時間の次元をもち，Hubble 時刻と呼ばれる。これは，宇宙誕生から現在までの経過時間であると考えられている。これを τ_0 とすると，(3) 式の H_0 よりは

$$\tau_0 = \frac{1}{H_0} \fallingdotseq 5.14\times10^{17}\,\text{sec} \fallingdotseq 163\,億年 \tag{4}$$

となる。

これは，発見者の名にちなみ Hubble の法則と呼ばれる。ただし，H_0 としては Hubble は，当初はかなり大きな値を想定した。したがって τ_0 は20億年位になってしまい，地球物理学的データと矛盾する事態となってしまったが，天文学の進歩とともに，現在は τ_0 は150億年から200億年の間だろうと考えられている。

なお，距離の推定は，原理的には，光のエネルギーが，球面状に広がって行く…すなわち，光は距離の 2 乗に反比例して減衰するという仮定にもとづく。

§ A 1. 2　膨張する宇宙の中の静止系

今，ある程度離れた距離に，二人の観測者 S_A と S_B が住んでいる。各々，宇宙を天文学的に観測し，自分を中心にして，座標系を構築している。有能な天文学者である彼等は，ほどなく Hubble の法則を発見するであろう。

今後，混乱のおそれがないかぎり，座標系をその原点の知能ある住人の名前で呼ぶ。S_A と S_B は，互いに相手が，自己の静止している座標系の中で，速度 v で後退して行くことを観測するであろう。

両者の距離を z_{AB} とすれば

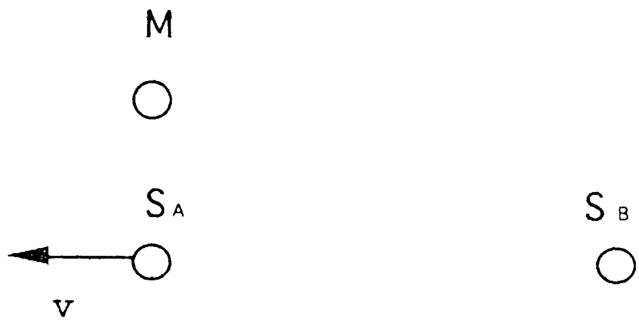
$$v = H_0 z_{AB} \tag{5}$$

なお，この式は，速度 v が光速に比して充分小さい場合に成立する式である。また，H_0 は，z_{AB} の単位に合わせて，適切に変換しなければならない。(1)，(3) 式を見れば，z_{AB} が 300 万光年であっても，v は 60 km/sec 程度であるから，光速 ($c \fallingdotseq 3.00\times10^8$ m/sec$=3.00\times10^5$ km/sec) に比して，v は充分小であると言える。アンドロメダ銀河までの距離は，230万光年程度であるから，(1) 式の適用範囲がどの程度のスケールか，だいたいわかるであろう。

天文学者にしてかつ，有能な通信士でもある S_A と S_B は，互いに情報を交換し，討議の上「宇宙原理」に到達する。つまり，彼等の宇宙は，どこで観測しても同じように見える。つまり，どこでも Hubble の法則が成立する。彼等は，さらに宇宙を探索し，多くの同じような仲間を発見するであろう。これらの観測者を S 族と名づける。彼等は，各々「自分は，一様に膨張する宇宙の中心に住んでいる。」と考えることができる。彼等の中で，とりたてて特別な立場にある者はいない。したがって，すべての物理法則に関して対等であるべきであり，彼等の間には「特殊相対性原理」が成立する。彼等の乗っている座標系が，まさに Einstein の言う慣性系なのである。

S_A と S_B の認識を A 1. 1 図と A 1. 2 図に示す。(M は次に登場する。) 彼等は，膨張する宇宙の中心で静止しているであるから静止系と呼んでもさしつかえないであろう。

A1.1　図　　静止系 S_A の認識



A1.2　図　　静止系 S_B および 移動系 Mの認識

§A 1. 3　膨張する宇宙の中の移動系

慣性系は「静止系」だけであろうか？　今，S_A のすぐそばを S_B を追いかける形で，M が通過していった。S_A の観測によれば，M の速度は，方向も大きさも S_B と等しい。S_B と M の光のやりとりに関して，Doppler 効果はおこらないから，M の認識は A 1. 2 図となる。つまり，S_A の速度に関しては，M は S_B と同意見である。M が全宇宙を観測し，S_B と交信して，充分討議すれば，次のような結論に達するであろう。M は，S_B を中心として膨張する宇宙の中で，S_B から等距離のところに住んでいる。宇宙の膨張につれて，S_A と S_B の間に住んでいる S 族は S_A に近い方から順次，M に遭遇する。M の立場は，S_B にひもでつなぎとめられた凧のようなものである。S_B の見地からは M は，S_B の観測する宇宙の膨張に逆らって S_B の方向に飛行しているのであるが，宇宙の膨張速度と飛行速度がつりあっていて，いつまでたっても，S_B と M の距離は縮まらない。つまり，S_B-M 間の距離は一定である。M にとっては，宇宙の膨張の中心は，S_B の住居（S_B 系の原点）である。やがて M は，宇宙を見まわして自分と似たような立場の観測者を多数見つける。彼らを M_B 族と呼ぶ。彼らは，おのおの，「S_B が自己を原点として構築した座標系」の原点からある距離だけはなれた点に住んでおり，そこに原点をおく座標系を構築している。座標系の構築という点に関して言えば，M_B 族は S_B に従属していると呼んでもよいであろう。いずれ，任意の S 族の観測者は，各々自己の座標系の中で静止している無数の M 族を発見するであろう。たとえば，S_A の構築した座標系の中で静止している無数の M 族が居る。彼等を M_A 族と呼ぼう。彼等は，各々の宗主（M_A 族にとっては S_A，M_B 族にとっては S_B）に対しては静止しているが，宗主の認識によれば，宗主が観測する宇宙の膨張に逆らって宗主の方に飛行しているため，結果的に宗主と等距離にあるのである。彼等を移動系と呼んでさしつかえないであろう。ところで，移動系はその宗主系と対等か？　宗主ではない静止系とは対等か？　このような事は，Einstein は考えなかった。いかなる天才といえども，考えないことは解決できない。

§A 1. 4　膨脹する宇宙の二次元数学モデル

時間軸と，ひとつの空間軸よりなる二次元 Riemann 空間を考える。

(i)　源時空 $(\hat{x}^0, \hat{x}^1)$ 系

時間軸：$\hat{x}^0 = c\tau$（τ は宇宙誕生からの経過時刻…宇宙時刻，c は光速度）

空間軸：ξ（宇宙虚角）

ξ の意味は，後で明かとなる。

源時空の基本テンソルを $\hat{\zeta}_{\mu\nu}$ とする。

[仮定 1]

$$\hat{\zeta}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & (c\tau)^2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

この時空は，明らかに我々の認識する時空とは異なる。我々の認識する宇宙の源になるものであるので源時空と名づけた。

(ii)　実時空 (x^0, x^1) 系

これは，我々が時空として認識するものである。

[仮定 2]　我々の認識する時空は，源時空より次の座標変換によって得られる。

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= ct = \hat{x}^0 \cosh\xi = c\tau\cosh\xi \\ x^1 &= z = \hat{x}^0 \sinh\xi = c\tau\sinh\xi \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

（t：実時刻座標，z：実距離座標）

座標変換 (2) によって，実時空の基本テンソル $\zeta_{\mu\nu}$ を求めると

$$\begin{aligned} \zeta_{\mu\nu} &= \frac{\partial\hat{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\hat{x}^\beta}{\partial x^\nu}\hat{\zeta}_{\alpha\beta} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh 2\xi, & -\sinh 2\xi \\ -\sinh 2\xi, & \cosh 2\xi \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

となる。

なお，

$$\begin{aligned} (x^0)^2 - (x^1)^2 &= (c\tau)^2(\cosh^2\xi - \sinh^2\xi) \\ &= (c\tau)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\therefore\quad \hat{x}^0 = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2} \tag{10}$$

$$\frac{x^1}{x^0} = \frac{\sinh\xi}{\cosh\xi} = \tanh\xi \tag{11}$$

$$\therefore\quad \hat{x}^1 = \tanh^{-1}\frac{x^1}{x^0} \tag{12}$$

を利用すれば，(8) 式は簡単に計算できる。

(iii)　Hubble の法則

$\xi = \eta =$ const. の点を宇宙の定点と呼ぶ。

実時空の原点より見ると宇宙の定点は，一定速度で後退しているように見える。

原点から宇宙の定点までの等宇宙時刻における距離は

$$z = c\tau\sinh\xi \tag{13}$$

である。

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\xi=\eta} = \frac{\partial z}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial t} = c\tanh\eta$$
$$= v = \text{const.} \tag{14}$$
$$\therefore \quad \frac{v}{c} = \tanh\eta \tag{15}$$

η を速度虚角と呼ぶ。
上式より

$$v = \frac{c}{c\tau\cosh\eta}\cdot c\tau\sinh\eta \tag{16}$$

$\tau = \tau_0$ のとき

$$v = \left(\frac{1}{\tau_0\cosh\eta}\right)\cdot c\tau_0\sinh\eta$$
$$= \overline{\mathrm{H}}_0 z_0 \tag{17}$$
$$\because \quad \overline{\mathrm{H}}_0 = \frac{1}{\tau_0\cosh\eta} \quad \text{（Hubble の定数に相当）}$$

z_0： $\tau = \tau_0$ の時の原点から宇宙の定点までの距離

(12) 式より

$$\lim_{\eta\to\infty} v = c \tag{18}$$
$$\because \quad \lim_{\eta\to\infty}\tanh\eta = 1 \tag{19}$$

これは，無限遠方の定点が光速で後退していることを示し，まことに妥当な結果である。
Hubble の法則は，η の小なるときに成立する。
すなわち，$|\eta| \ll 1$ であれば

$$\cosh\eta = 1+\frac{1}{2}\eta^2 \fallingdotseq 1 \tag{20}$$

一方

$$\sinh\eta \fallingdotseq \eta \tag{21}$$

これは無視しないことにする。
かくして，$\tau = \tau_0$ のとき

$$v \fallingdotseq \left(\frac{1}{\tau_0}\right)c\tau_0\sinh\eta$$
$$= \mathrm{H}_0 z_0 \tag{22}$$

あきらかに

$$\tau_0 = \frac{1}{\mathrm{H}_0} \tag{23}$$

(iv) 静止系間の座標変換

S_A が $\xi = 0$ に，S_B が $\xi = \eta$ に住んでいるとする。

$$\left.\begin{aligned} \xi_A &= \xi \\ \therefore \quad \xi_B &= \xi_A - \eta = \xi - \eta \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

S_A の基本テンソルを $\zeta_{A,\mu\nu}$，S_B の基本テンソルを $\zeta_{B,\mu\nu}$ とすると
(8) 式より，ただちに

$$\zeta_{A,\mu\nu} = \begin{bmatrix} \cosh(2\xi_A), & -\sinh(2\xi_A) \\ -\sinh(2\xi_A), & \cosh(2\xi_A) \end{bmatrix} \tag{25}$$

S_A と S_B 間に成立する相対性原理より

$$\zeta_{\mathrm{B},\mu\nu} = \begin{bmatrix} \cosh(2\xi_{\mathrm{B}}), & -\sinh(2\xi_{\mathrm{B}}) \\ -\sinh(2\xi_{\mathrm{B}}), & \cosh(2\xi_{\mathrm{B}}) \end{bmatrix} \tag{26}$$

でなければならない。

$$\left.\begin{aligned} \cosh(2\xi_{\mathrm{B}}) &= \cosh\{2(\xi_{\mathrm{A}}-\eta)\} \\ \sinh(2\xi_{\mathrm{B}}) &= \sinh\{2(\xi_{\mathrm{A}}-\eta)\} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

これは，$\mathrm{S_A}$, $\mathrm{S_B}$ 間の共変的変換係数テンソル $\overline{\mathrm{M}}_\nu{}^\mu$ は

$$\overline{\mathrm{M}}_\nu{}^\mu = \begin{bmatrix} \cosh\eta, & \sinh\eta \\ \sinh\eta, & \cosh\eta \end{bmatrix} \tag{28}$$

反変的変換係数テンソル $\mathrm{M}_\nu{}^\mu$ は

$$\mathrm{M}_\nu{}^\mu = \begin{bmatrix} \cosh\eta, & -\sinh\eta \\ -\sinh\eta, & \cosh\eta \end{bmatrix} \tag{29}$$

であることを意味する。

つまり，$\mathrm{S_A}$ 座標から，$\mathrm{S_B}$ 座標の変換は Lorentz 変換である。

実際に，$\mathrm{S_A}$ 系の座標に添字 A, $\mathrm{S_B}$ 系の座標に添字 B をつけると

$$\begin{aligned} ct_{\mathrm{B}} &= c\tau\cosh\xi_{\mathrm{B}} \\ &= c\tau\cosh(\xi-\eta) \\ &= c\tau\cosh\xi\cosh\eta - c\tau\sinh\xi\sinh\eta \\ &= ct_{\mathrm{A}}\cosh\eta - z_{\mathrm{A}}\sinh\eta \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{B}} &= c\tau\sinh\xi_{\mathrm{B}} \\ &= c\tau\sinh(\xi-\eta) \\ &= c\tau\sinh\xi\cosh\eta - c\tau\cosh\xi\sinh\eta \\ &= z_{\mathrm{A}}\cosh\eta - ct_{\mathrm{A}}\sinh\eta \end{aligned} \tag{31}$$

あきらかに

$$\begin{bmatrix} ct_{\mathrm{B}} \\ z_{\mathrm{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\eta, & -\sinh\eta \\ -\sinh\eta, & \cosh\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{A}} \end{bmatrix} \tag{32}$$

これは，座標に関する Lorentz 変換そのものであり，(29) 式がただちに得られる。なお，時刻座標の原点は，宇宙誕生の時刻（$\tau=0$）であり，このとき，$\mathrm{S_A}$ の原点と $\mathrm{S_B}$ の原点とは一致している。一般に，この時，宇宙の半径がゼロであったと言われているが，これは適切ではない。

宇宙の半径は，すくなくとも 2 種あり

$$等宇宙時刻：\mathrm{R}_1 = \lim_{\xi\to\infty} c\tau\sinh\xi = \infty \tag{33}$$

$$等実時間座標：\mathrm{R}_2 = \lim_{\tau\to\infty} c\tau\tanh\xi = c\tau \tag{34}$$

を問題により使い分けねばならない。たしかに

$$\lim_{\substack{\tau\to 0 \\ \xi\to\infty}} \mathrm{R}_2 = 0 \tag{35}$$

であろうが

$$\lim_{\substack{\tau\to 0 \\ \xi\to\infty}} \mathrm{R}_1 = 0\times\infty \quad （不定） \tag{36}$$

である。

だから，宇宙誕生の時，全宇宙の体積はゼロあったと，軽々しく断定してはいけない。それは問題の性質により異なるはずである。

なお，(32) 式が成立するためには，時刻座標の原点は，任意にとることができない。（常に宇宙誕生の時刻でなければならない。）Einstein は，これを見おとした。

(v) 静止系と移動系の間の座標変換

M は，$\mathrm{S_B}$ 系の中で静止しているのであるから（$\mathrm{S_A}$ 系のすぐそばを飛行しているにもかかわら

ず）基本テンソルの形は S_B と同じである。

$$\zeta_{M,\mu\nu}=\begin{bmatrix}\cosh(2\xi_B), & -\sinh(2\xi_B)\\ -\sinh(2\xi_B), & \cosh(2\xi_B)\end{bmatrix} \tag{37}$$

したがって，S_A と M の間には，S_A と S_B との間に成立する Lorentz 変換が，やはり成立する。しかし，それはあくまでもテンソルに作用する混合テンソル $\overline{M}_\nu{}^\mu$, $M_\nu{}^\mu$ についてである。

特殊相対論に特有の座標そのものに関する Lorentz 変換は成立しない。

$$\begin{bmatrix}ct_M\\ z_M\end{bmatrix}\fallingdotseq\begin{bmatrix}\cosh\eta, & -\sinh\eta\\ -\sinh\eta, & \cosh\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ct_A\\ z_A\end{bmatrix} \tag{38}$$

したがって，S_A 系と M 系間には，特殊相対論は完全には成立しない。（ただし，M 系の座標に添字 M をつけた。）

$\tau=\tau_0$ のとき，S_A 系と M 系の原点が一致する様に，４次元の座標系モデルを作ることは，かなり複雑な作業であり，まだ完了していない。

(vi)　近似的基本テンソル

一般に，基本テンソル中の速度虚角 η は無視できない。天文学上にかぎらず，我々の身近に光速に近い速度はいくらでもある。（たとえば，テレビ受像器のブラウン管中の電子の速度），しかし，基本テンソル中の ξ は，ほとんど常に無視できる。

なぜならば，ξ は，

$$z_0=c\tau_0\sinh\xi \tag{39}$$

程度の距離に対応するからである。たとえば，$\xi=10^{-10}$ のときは，

$$\begin{aligned} z_0 &\fallingdotseq c\tau_0\times10^{-10}=1.54\times10^{16}\mathrm{m}\\ &\fallingdotseq 1.6\ \text{光年}\end{aligned} \tag{40}$$

となる。すなわち，この程度の広がりの中で，基本テンソルを論ずることに対応する。この距離は，非常に大きめに見つもった太陽系の半径程度である。この領域内で，ξ は 10^{-10} 以下である。だから，地上での Lorentz 変換を論ずる際は，ほとんどすべて ξ を無視できる。

この場合，各々のテンソルの近似形は

静止系の基本テンソルは

$$\zeta_{A,\mu\nu}=\zeta_{\mu\nu}\fallingdotseq\begin{bmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{bmatrix} \tag{41}$$

移動系の基本テンソルは

$$\zeta_{B,\mu\nu}=\zeta_{M,\mu\nu}\fallingdotseq\begin{bmatrix}\cosh 2\eta, & \sinh 2\eta\\ \sinh 2\eta, & \cosh 2\eta\end{bmatrix} \tag{42}$$

ただし，今までの議論で明らかなように，移動系の移動方向は，z 軸の正の方向をプラスにとってある。

このように，基本テンソルの成分を識別できれば（宇宙を見わたす必要はなく），地上での実験で，一種の「絶対速度」$c\tanh\eta$ を測定できるはずである。

それならば，何故，今までの測定にひっかからないのか？

それは，Einstein の疑似基本テンソルの性質による。

(vii)　Einstein 疑似基本テンソル

重力場を考えていないから，

$$g_{\mu\nu}=g_{0,\mu\nu} \tag{43}$$

である。

このテンソルを求めるための要請は，静止系で，

$$\zeta_{0\mu} = \zeta_{\nu 0} = 0 \quad (\mu, \nu \neq 0) \tag{44}$$

の系を見つけ，そこで，静止系，時間軸反転テンソルを定義することである。

これは (41) 式より，任意の静止系で近似的に実現できる。

しかし，厳密には (25) 式を見れば，実時空では実現できない。($\zeta_{01}, \zeta_{01} \neq 0$ であるから）源時空までさかのぼらなければならない。

源時空では，S_A 系において，

$$\widehat{\zeta}_{A, \mu\nu} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & (c\tau)^2 \end{bmatrix} \tag{45}$$

ここで

$$\Delta_\nu^\mu = \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

とおくと，源時空の Einstein の疑似基本テンソル $g_{\mu\nu}$ は

$$\widehat{g}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & (c\tau)^2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

これを実時空の量に変換すると

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \frac{\partial \widehat{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \widehat{x}^\beta}{\partial x^\nu} \widehat{g}_{\alpha\beta} \\ &= \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{48}$$

$$\because \quad \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1 \tag{49}$$

なお，このとき実時空の静止系時間軸反転テンソル $\Delta_{R, \nu}{}^\mu$ は

$$\begin{aligned} \Delta_{R, \nu}{}^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \widehat{x}^\alpha} \cdot \frac{\partial \widehat{x}^\beta}{\partial x^\nu} \Delta_\beta^\alpha \\ &= \begin{bmatrix} -\cosh(2\xi), & -\sinh(2\xi) \\ \sinh(2\xi), & \cosh(2\xi) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{50}$$

となる。なお，(50) の計算する際は，一般の偏微分演算では x, y を独立変数の組として

$$\frac{\partial x}{\partial y} \neq \frac{1}{\dfrac{\partial y}{\partial x}} \tag{51}$$

であることを考え，充分に慎重に計算しなければならない。((51) 式で等号が成立するのは，実際は常微分演算であるものを，形式的に偏微分の記号で表記した場合に限られる。) (50) 式の正しさは，$\zeta_{\mu\nu} (= \zeta_{A, \mu\nu})$, $g_{\mu\nu}$ と $\Delta_{R, \nu}{}^\mu$ の式を検討すれば明白である。したがって，Δ_ν^μ の名前のつけ方が，適切でなかったことになる。源時空時間軸反転テンソルとすべきであった。(なお，$|\xi| \ll 1$ の近似で，(50) 式は (46) 式と一致する。)

4 次元時空に拡張しても，

$$\widehat{\zeta}_{0\mu} = \widehat{\zeta}_{\nu 0} = 0 \quad (\mu, \nu \neq 0) \tag{52}$$

の条件は，常に満たされる。

しかし，$g_{\mu\nu}$ は重力場のないデカルト座標系であっても，

$$g_{\mu\nu} \neq \begin{bmatrix} -1, & & & \mathbf{0} \\ & 1, & & \\ & & 1, & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \tag{53}$$

である。(そう簡単ではない。) したがって，$\zeta_{\mu\nu}$ ではなく，$g_{\mu\nu}$ が主要な役割を演ずる物理現象に

おいても，4次元空間であれば，絶対速度の根跡は $g_{\mu\nu}$ の中に残ることになる。すなわち，重力場のない場合のデカルト座標系と言えども，$g_{\mu\nu}$ は Lorentz 変換に不変ではない。

これについては，さらに解析中である。

〔付録Ⅰ終〕

付録〔Ⅱ〕4次元正常 Riemann 空間における Levi-Civita の記号

正常 Riemann 空間においては，Levi-Civita の記号は，彼等の当初の原案どおりになる。

すなわち，共変的記号を e_{ijkl}，反変的記号を e^{ijkl} とすると

$$\begin{aligned} e_{ijkl} &= \\ e^{ijkl} &= \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \;\;1:\ (0123) \to (ijkl)\ \text{が偶置換のとき} \\ -1:\ (0123) \to (ijkl)\ \text{が奇置換のとき} \\ \;\;0:\ \text{その他の場合}\ (ijkl\ \text{の中に同じ} \\ \qquad \text{ものが二つ以上あるとき}) \end{array} \right\} \tag{1}$$

となる。

これら，二つの記号の関係は，

$$e_{ijkl} = \frac{1}{\zeta} \zeta_{i\mu} \zeta_{j\nu} \zeta_{k\rho} \zeta_{l\lambda} e^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{2}$$

$$e^{ijkl} = \zeta \zeta^{i\mu} \zeta^{j\nu} \zeta^{k\rho} \zeta^{l\lambda} e_{\mu\nu\rho\lambda} \tag{3}$$

である。

$$\left. \begin{array}{ll} e_{ijkl}: & \text{重みマイナス 1 の 4 階の共変テンソル密度} \\ e^{ijkl}: & \text{重みプラス 1 の 4 階の反変テンソル密度} \\ \zeta\ \ : & \text{重みプラス 2 のスカラ密度} \end{array} \right\} \tag{4}$$

であるから，(2)，(3) 式は，これら二つの記号は，実は同じ物理量（テンソル密度）の二つの異なった数学的表現であることを示す式である。

sign (x) を x の符号を示す関数とすると

$$\mathrm{sign}(e_{ijkl}) = \mathrm{sign}(e^{ijkl}) \tag{5}$$

となって，Levi-Civita の記号を含む物理関係式（たとえば，4次元時空における3次元微小体積を表現する式（本文の文献(4)参照））に余分な負号が出現しなくなる。

〔付録Ⅱ終〕

〔論文　終〕