

Levi-Civita の記号と擬テンソルについて

村 田 茂 昭

1. 序 論

私は、古典場の理論の再構築を企てているが^{(1),(19)}、もちろん、その舞台装置は4次元 Riemann 空間である。それは、ことによると、従来の理論物理学の常識に反して、正常 Riemann 空間かも知れないが、まだ、そう断定するまでには至っていない。

本論文の主要な目的は、4次元時空を本格的に取り扱う準備として、古典微分幾何学（いわゆるベクトル代数）にあらわれる、有名な妖怪である軸性ベクトルを、Riemann 幾何学にもとづいて退治しておこうとするものである。軸性ベクトルは、Riemann 幾何学的見地においては、後述の擬テンソルと言われる量のひとつである。

Levi-Civita の記号^{(2),(3)}は、最近では、電気磁気学を含む理論物理学において、あまり重要視されていないように見える。それは、この記号が、特殊相対論（この理論においては、通常は Riemann 幾何学は使用されない）における「擬テンソル」と言う厄介な量に関係があるからである。一般相対論（ここにおいては Riemann 幾何学が主要な記述言語の役割をする）においては別の擬テンソルが登場するが、それは本論文とは無関係である。本論文では、特殊相対論における擬テンソルを一般相対論風に（つまり Riemann 幾何学を用いて）解析している。

広く一般に、まちがいではないが不適切な概念「数学では、ある座標系が、右手系か左手系かを区別できない」が行きわたっている。テンソル解析の親切な入門書には、たとえば「軸性ベクトル a と極性ベクトル b の和 ... $a+b...$ は全く無意味であることを知ることが、重要な教育成果である。」と言う記述すらある。⁽⁴⁾

私は、本論文で、「座標系の符号」と言う新概念を提案し、この不自然な状態を改善しようと企てる。私見によれば、「軸性ベクトル」と言う変則的量が登場したのは、三次元空間のテンソル解析において、2階の反対称テンソルの独立な成分とベクトルの成分の対応づけの仕方（すなわち軸性ベクトルの定義）が適切でないためである。これを、改めると二階の反対称テンソルから、数学的に完全に真のベクトルを得ることができる。その定義式の中に座標系の符号が含まれるのである。

新定義においても、物理学においては、極性ベクトルと軸性ベクトルと言う区別を残してもさしつかえない。これらの二つの量の和が、無意味になる場合があるのは、数学的理由ではなく、物理学的事情による。（物理学においては、従来でも、二つの別の極性ベクトルの和が、いつでも意味をもつとはかぎらないことを、読者は思い起こすべきである。）

2. テンソル解析の初步

本論文の読者は、テンソル解析を一応心得ていることが期待されるが、私が、どのような表記法を採用しているかを、読者に確実に伝えるため、以下にテンソル解析の初步を論ずる。簡単のため3次元空間のイメージで話をすすめるが、次元数は原則として任意である。

まず、座標 $x^\mu(x^1, x^2, x^3)$ 系から $x'^\mu(x'^1, x'^2, x'^3)$ 系への座標変換を考えてみよう。 x'^μ は x^ν の関数であるから、 $f(\)$ をふつうの関数の記号として

$$x'^\mu = f^\mu(x^\nu) \quad (2.1)$$

この座標変換によって座標の微分 dx^μ は

$$\begin{aligned} dx'^\mu &= \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \\ &= M_\nu^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\therefore M_\nu^\mu \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.3)$$

のように変換される。

なお、「上下に、同じ添字（指標とも言う）があるときは、その添字について和をとる。」と言う Einstein の省略記法を採用している。たとえば

$$M_\nu^\mu dx^\nu \equiv \sum_{\nu=1}^3 M_\nu^\mu dx^\nu \quad (2.4)$$

である。

Einstein のはじめの定義では「上下に同じギリシャ文字の添字があるとき」であったが、数式が複雑になるにつれて、文字の数がたりなくなり、最近の傾向としては、「上下に同じ文字（ラテン文字であってもよい）があるとき」に拡張されている。本論文を含む、私の最近の論文では、この拡張された Einstein の省略記法」を採用している。（式を見やすくするために、なるべく、和をとる添字はギリシャ文字になるように努力しているが、文字がたりなくなる場合は、やむを得ないと了解願いたい。）

(2.3) 式の M_ν^μ は、座標変換 (2.1) の際の、反変的量に関する変換係数である。この M_ν^μ 自体は、後述のように、2階の混合テンソルである。

一般に、座標変換 (2.1) に際して (2.2) 式のごとくに変換される量を反変ベクトルと呼び、添字（指標）を上につける。

〔例〕 dx^μ, A^μ 等

座標の微分は反変ベクトルであるが、座標そのものは例外（デカルト座標）を除き反変ベクトルではない。しかし、座標の指標は、一般に上につけるのが習慣である。

一方、スカラ F の座標による微分は、座標変換 (2.1) によって下記のごとくに変換される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x'^\nu} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \\ &= \bar{M}_\nu^\mu \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\bar{M}_\nu^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \quad (2.6)$$

このように変換される量を共変ベクトルと言い、指標を下につける。

$$\therefore B_\mu \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (2.7)$$

(2.6) 式で示される \bar{M}_ν^μ は、座標変換 (2.1) の際の、共変的量に関する変換係数であり、やはり2階の混合テンソルである。

座標変換に際して、反変ベクトル A^μ と共変ベクトル B_ν の直積は、次の様に変換される。

$$A'^\mu B'_\nu = M_\alpha^\mu \bar{M}_\nu^\beta (A^\alpha B_\beta) \quad (2.8)$$

この様に変化する量を2階の混合テンソルと言う。ただし、この様に変化する量をすべて混合テンソルと呼ぶのであって、混合テンソルが、すべて、二つのベクトルの直積に分解可能なわけ

はない。このようにして、2階の反変テンソル、共変テンソル、さらに高階のテンソルが定義できる。くわしくは、テンソル解析の入門書を参照してほしい。

$M_\nu^\mu, \bar{M}_\nu^\mu$ が混合テンソルとして、座標変換の際どのように変換されるかは、あまり論じられていない。(そもそも、この変換係数をテンソルの形で表記する習慣が、なきにひとしい。)

これらは混合テンソルであるから、

$$M'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^j} M_\nu^\mu \quad (2.9)$$

$$\bar{M}^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^j} \bar{M}_\nu^\mu \quad (2.10)$$

である。

このことは、たとえば、(2.9) の右辺を書きかえて

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^j} \\ &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^\mu} \delta_j^\mu \\ &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \end{aligned} \quad (2.11)$$

より自明である。

ただし、 δ_ν^μ は Kronecker の delta である。

上式を見れば、ただちに

$$M_\nu^\mu \bar{M}_\rho^\nu = \delta_\rho^\mu \quad (2.12)$$

$$\bar{M}_\nu^\mu M_\rho^\nu = \delta_\rho^\mu \quad (2.13)$$

であることがわかる。

これらの関係を行列で論ずる。 $M_\nu^\mu, \bar{M}_\nu^\mu$ から μ 行 ν 列の行列を作ると

$$(\text{Mat}[\bar{M}_\nu^\mu])^{-1} = \text{Mat}[M_\nu^\mu] \quad (2.14)$$

である。ここで、 $\text{Mat}[X]$ は、2階のテンソル X よりつくる行列を表わす。行列の積の定義からすると X は混合テンソルにかぎるのが自然であるが、表記の自由度を増すために、X は 2 階のテンソルであれば、反変、共変、混合のいずれでもよいこととする。

3. 三次元の Levi-Civita の記号

Levi-Civita の記号は $n (\geq 2)$ 次元空間において定義できるが、簡単かつ重要性を考慮し、まず 3 次元空間で論ずる。この記号には、反変的記号 e^{ijk} と共に変的記号 e_{ijk} の二種がある。

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & (1, 2, 3) \rightarrow (i, j, k) \text{ が偶置換のとき} \\ -1 & (1, 2, 3) \rightarrow (i, j, k) \text{ が奇置換のとき} \\ 0 & \text{その他のとき } (i, j, k \text{ のうち二つ以上が} \\ & \text{互いに等しいとき)} \end{cases} \quad (3.1)$$

e^{ijk} の性質を論ずるために、さしあたり「これは 3 階の反変テンソルである」と仮定して検討してみる。もし、この仮定が正しければ、(2.1) 式のごとき座標変換の際に

$$e'^{ijk} = M_\mu^i M_\nu^j M_\rho^k e^{\mu\nu\rho} \quad (3.2)$$

のごとくに変換されるはずである。

e^{ijk} は 0, 1, -1 の値しかとらないことを考えると、(3.2) 式は $\text{Mat}[M_\nu^\mu]$ の行列式の定義式そのものであると言つてよい。(ただし符号には注意を要する。) もしそうであれば、 $\det[M]$ を行列 M の行列式とすると、

$$M \equiv \det\{\text{Mat}[M_\nu^\mu]\} \quad (3.3)$$

において、

$$e'^{ijk} = \begin{cases} M & \cdots (1, 2, 3) \rightarrow (i, j, k) \text{ が偶置換のとき} \\ -M & \cdots (1, 2, 3) \rightarrow (i, j, k) \text{ が奇置換のとき} \\ 0 & \rightarrow \text{その他の場合} \end{cases} \quad (3.4)$$

となることになる。しかし、事実は、Levi-Civita の記号は、任意の座標変換によっても不变であるから、 e'^{ijk} は、(3.1) 式で示される e^{ijk} と同じでなければならない。つまり、これを、3 階の反変テンソルとした仮定は正しくなく、(3.2) 式の右辺に $\frac{1}{M}$ の項をつけ加えてやらねばならない。(2.14) 式より

$$\det\{\text{Mat}[\bar{M}_\nu^\mu]\} = \frac{1}{M} \equiv \bar{M} \quad (3.4)$$

とすると

$$\begin{aligned} e'^{ijk} &= \frac{1}{M} M_\mu^i M_\nu^j M_\rho^k e^{\mu\nu\rho} \\ &= \bar{M} M_\mu^i M_\nu^j M_\rho^k e^{\mu\nu\rho} \end{aligned} \quad (3.5)$$

が、正しい変換公式になる。

なお、

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \det \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}, \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}, \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}, \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}, \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1}, \frac{\partial x^3}{\partial x'^2}, \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{array} \right] \\ &= \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^1, x'^2, x'^3)} \\ &= J \text{ (Jacobian)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Jacobian⁽⁵⁾ の値は、 x^μ, x'^ν に関して「どちらを独立変数とし、どちらをその関数とみなすか？」によって値が逆転するので注意を要する。上記の例は x^μ を x'^ν の関数とみなしている。

一般に、座標変換 (2.1) に際して、

$$T_{abc\dots}^{ijk\dots} = (\bar{M})^w M_\mu^i M_\nu^j M_\rho^k \dots \bar{M}_a^\alpha \bar{M}_b^\beta \bar{M}_c^\gamma \dots T_{\alpha\beta\gamma\dots}^{wxyz\dots} \quad (3.7)$$

のように変換される量を重み (weight) w のテンソル密度と言う。^{(6),(7),(8),(9)}

したがって e^{ijk} は重み 1 の 3 階の反変テンソル密度である。

一方、同様の計算によって、

$$e'_{ijk} = (\bar{M})^{-1} \bar{M}_i^\mu \bar{M}_j^\nu \bar{M}_k^\rho e_{\mu\nu\rho} \quad (3.8)$$

となる。したがって e_{ijk} は重みマイナス 1 の 3 階の共変テンソル密度である。「一般相対論では、このような変な量は扱わない。」と宣言している理論家もいる⁽¹⁰⁾が、それは正しくない。これは、テンソル密度と言う、テンソルの上位の概念であり、数学的に由緒正しい量である。いわゆるテンソルは、重みゼロのテンソル密度である。この、重みマイナス 1 のテンソル密度が、一部の理論家の予想に反して、すでに、暗黙のうちに、理論物理学に登場していることを後に示す。

4. 軸性ベクトルおよびその他の量

Levi-Civita の記号自体が擬テンソルと呼ばれることがある⁽¹¹⁾が、それは、やめるべきである。前章で述べたように、この記号は、由緒正しいテンソル密度なのである。本論文の立場を、明ら

かにするために、擬テンソル^{(9),(12)} と呼ばれるべき量を定義しておこう。

その前に、座標系の基本テンソルの行列式に言及しておかなければならない。

基本テンソルを $g_{\mu\nu}$ とするとき、

$$g \equiv \det[\text{Mat}[g_{\mu\nu}]] \quad (4.1)$$

とする。これは、まったく一般的な定義なのであるが、事態をわかりやすくするために、若干説明しておこう。我々が、よく知っている座標系は、重力場が無視できる場合で、かつ、曲線直交座標系⁽¹³⁾ である。この場合

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} h_1^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_2^2 \\ \mathbf{0} & h_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ただし、 h_k は測度係数で

$$h_k > 0 \quad (4.3)$$

とおいても、一般性を失なわないだろう。

このとき、(4.1) 式より

$$g = h_1^2 h_2^2 h_3^2 \quad (4.4)$$

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \quad (4.5)$$

となる。(h_k の添字は共変ベクトルを示すものではないことに注意せよ。)

ここで、擬テンソルの定義に入ろう。

【定義 I】 擬テンソルとは、下記のごとき量を言う。

重要かつ典型的擬テンソルの例

番号	名 称	テンソルの階数	定 義 式
1	擬スカラ	0	$\Phi^* = \sqrt{g} e_{\mu\nu\rho} A^\mu B^\nu C^\rho$
2	擬スカラ	0	$\Psi^* = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{\mu\nu\rho} A_\mu B_\nu C_\rho$
3	軸性ベクトル (ベクトル積)	1	$A_i^* = \sqrt{g} e_{i\mu\nu} B^\mu C^\nu$
3'	軸性ベクトル (ベクトル積)	1	$A_i^* = \frac{1}{2} \sqrt{g} e_{i\mu\nu} (B^\mu C^\nu - B^\nu C^\mu)$
4	軸性ベクトル (ベクトル積)	1	$A^{*i} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{i\mu\nu} B_\mu C_\nu$
4'	軸性ベクトル (ベクトル積)	1	$A^{*i} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} e^{i\mu\nu} (B_\mu C_\nu - B_\nu C_\mu)$
5	軸性ベクトル (ローテーション)	1	$A^{*i} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{i\mu\nu} \partial_\mu B_\nu$
5'	軸性ベクトル (ローテーション)	1	$A^{*i} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} e^{i\mu\nu} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)$
6	擬スカラ (微小体積要素)	0	$dv = \sqrt{g} e_{\mu\nu\rho} du^\mu dv^\nu dw^\rho$

ただし、 $A^\mu, A_\mu, B^\mu, B_\mu, C^\mu, C_\mu$ は真のベクトル（極性ベクトル）である。

[注] A_μ と A^μ との関係は、

$$\left. \begin{aligned} A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu \\ A^\mu &= g^{\mu\nu} A_\nu \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \quad (4.6)$$

ただし、 $g_{\mu\nu}$ は基本テンソルの共変成分、 $g^{\mu\nu}$ は、基本テンソルの反変成分である。

したがって、 A_μ, A^μ は、あるひとつの量（この場合はベクトル）の異なる数学的表現である。つまり、共変ベクトル A_μ と反変ベクトル A^μ が、独立に別々に存在するわけではない。したがって、ベクトル A の共変成分が A_μ 、反変成分が A^μ と言った方が、適切なのである。上記において、基本テンソルの共変成分、反変成分と言う表現を、何も定義せずに使用したが、一般に、ある n 階のテンソルは、物理量としては一種であって、その数学的表現が、（どの指標が上につき、どの指標が下につくか）いろいろあると考えるべきである。

しかし、本論文では、他の多くの論文のように、便宜的に、共変テンソル A_μ と言うような表現を使っているのである。

定義 I に掲げられている諸量のうちで、軸性ベクトルは、従来の理論では、二つのベクトルより作る反対称テンソルの独立な成分に関連づけられる場合が、ほとんどであるので、定義式は $3', 4'$ が、通常知られている。しかし、 $3, 4$ がより簡潔な定義式である。 $5, 5'$ のローテーションについても同様なことが言える。

これらの擬テンソルが、右手系から左手系への座標変換の際、どのような振舞をするか、調べてみよう。

右手系から、左手系への変換とは、変換係数テンソル $M_\nu^\mu, \bar{M}_\nu^\mu$ から作られる行列の行列式 M, \bar{M} が負になる場合である。

$$M, \bar{M} < 0 \quad (4.7)$$

簡単のため、一番目の座標軸のみを反転しよう。

$$\left. \begin{array}{l} x'^1 = -x^1 \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

$$\therefore M_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad \mu \text{ 行 } \nu \text{ 列表示} \quad (4.9)$$

$$\therefore \bar{M}_\nu^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad \mu \text{ 行 } \nu \text{ 列表示} \quad (4.10)$$

このとき、いわゆる極性ベクトルの反変成分は、

$$A'^\mu = M_\nu^\mu A^\nu \quad (4.11)$$

となる。ここで

$$A^\mu = (A^1, A^2, A^3) \quad (4.12)$$

とすると

$$\begin{aligned} A'^\mu &= (A'^1, A'^2, A'^3) \\ &= (-A^1, A^2, A^3) \end{aligned} \quad (4.13)$$

同様にして

$$B'^\mu = (-B^1, B^2, B^3) \quad (4.14)$$

$$C'^\mu = (-C^1, C^2, C^3) \quad (4.15)$$

つまり、予期したごとくに、第 1 成分の符号が反転する。

ここで、〔定義 I〕の 1. 擬スカラについて、検討しよう。

$$\Phi^* = \sqrt{g} e_{\mu\nu\rho} A^\mu B^\nu C^\rho \quad (4.16)$$

この変換で \sqrt{g} は不変である。一方、 $e_{\mu\nu\rho}$ のゼロとはならない項を考えると、それにかけあわされる A^μ, B^ν, C^ρ のうちの必ずひとつの項のみの符号が反転することは (4.13), (4.14), (4.15) より明白である。故に

$$\therefore \Phi'^* = -\Phi^* \quad (4.17)$$

つまり、〔定義 I〕の 1. の量は (4. 8) 式で示される座標変換の際に、符号が、反転してしまう。スカラの定義は、任意の座標変換の際に、値が変わることにあるから、これはスカラではない。 \sqrt{g} の変化については、あとで、くわしくのべるが、 Φ^* は、 $M > 0$ の変換に際しては不变である。つまり、 $M > 0$ の条件があればスカラのように振舞う。故にこれを擬スカラと呼ぶのである。

次に、〔定義 I〕の 3. 軸性ベクトルについて検討しよう。

$$A_\mu^* = \sqrt{g} e_{\mu\nu\rho} B^\nu C^\rho \quad (4. 18)$$

これに、座標変換 (4. 8) をほどこすと、

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1'^* = \sqrt{g'} (B'^2 C'^3 - B'^3 C'^2) = A_1^* \\ A_2'^* = \sqrt{g'} (B'^3 C'^1 - B'^1 C'^3) = -A_2^* \\ A_3'^* = \sqrt{g'} (B'^1 C'^2 - B'^2 C'^1) = -A_3^* \end{array} \right\} \quad (4. 19)$$

となる。

反変ベクトルから出発して共変ベクトルになるので若干ややこしいが、ここで重要なのは、符号の変化のみであるから、読者は、さしあたりデカルト座標系で考えてさしつかえない。デカルト系においては、

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1 \quad (4. 20)$$

$$A_\mu = A^\mu \quad \text{etc.} \quad (4. 21)$$

また、

$$g' = g = 1 \quad (4. 22)$$

である。

(4. 19) を、ながめると、座標変換 (4. 8) によって、符号が反転するであろうと期待されていた第 1 成分の符号は反転せず、この座標変換に無関係なはずの、第 2 成分、第 3 成分の符号が反転してしまう。これは、(4. 8) 式の座標変換を実行すると、今までと同じ物理関係式を成立させるためには、 A^* と言う物理量（この場合はベクトル）の実空間における向きの定義を、反対にしなければならないことを意味する。

2 階以上の擬テンソルについては、若干複雑であるが、類似のことがおこる。

このように、これらの量は右手系から左手系（あるいはその逆）の変換に際して、符号が真のスカラやベクトルとは反対になってしまって、擬という接頭語をつけるより仕方のない事態になってしまうのである。このような、事態になった原因は、けっして Levi-Civita 記号のせいではなく、これらの式に含まれる \sqrt{g} という因子のせいである。特殊相対論においては、この因子（Einstein の理論では、4 次元時空において、 g は負なので $\sqrt{-g}$ を使用する）が数値的に 1 に等しいので、式では、しばしば省略される。（ミンコウスキ時空を想定している）そのため、真の原因がなかなかわかりにくいのである。

5. 基本テンソルの行列式と擬テンソル

ここで、基本テンソルから作られる行列式 g の (2. 1) 式の座標変換に際する変換のされ方を追求しよう。共変基本テンソルは、

$$g'_{ij} = \bar{M}_i^\mu \bar{M}_j^\nu g_{\mu\nu} \quad (5. 1)$$

の形の変換をうける。これを行列の形で記述すると、

$$\text{Mat}[g'_{ij}] = (\text{Mat}[\bar{M}_i^\mu])^T \times \text{Mat}[g_{\mu\nu}] \times \text{Mat}[\bar{M}_j^\nu] \quad (5. 2)$$

となる。これらより行列式を作ると、

$$g' = (\bar{M})^2 g \quad (5. 3)$$

ただし、

$$g' = \det[\text{Mat}[g'_{ij}]] \quad (5. 4)$$

である。

すなわち、(5.3)式より、 g は重み 2 のスカラ（0 階のテンソル）密度である。したがって、 \sqrt{g} は重み 1 の擬スカラ密度である。真のスカラ密度にならないのは、下記のごとき事情による。

$$\sqrt{g'} = \sqrt{(\bar{M})^2} \sqrt{g} = \text{Abs}[\bar{M}] \sqrt{g} \quad (5.5)$$

ただし、 $\text{Abs}[x]$ は x の絶対値を示す関数である。（重みが奇数のスカラ密度は、右手系から左手系への座標変換に際して符号が反転しなければならない。）

上式においては、 $(\bar{M})^2$ の平方根を求める演算において、 \bar{M}_ν^μ より作る行列の行列式 \bar{M} の、符号に関する情報が失なわれてしまう。

すなわち、(4.18)式は、

$$\begin{aligned} A_\mu^* &= (\sqrt{g}) \times (e_{\mu\nu\rho}) \times (B^\mu C^\rho) \\ &= (\text{重み 1 の擬テンソル密度}) \times (\text{重みマイナス 1 の共変 3 階の} \\ &\quad \text{テンソル密度}) \times (\text{2 階の反変テンソル}) \\ &= \text{共変 1 階の擬テンソル} \end{aligned} \quad (5.6)$$

なのである。

つまり本論文で定義している擬テンソルとは、(2.1)式の形の座標変換に際して、

$$P'^{ijk}_{abc} = \frac{\text{Abs}[\bar{M}]}{\bar{M}} M_\mu^i M_\nu^j M_\rho^k \cdots \bar{M}_a^\alpha \bar{M}_b^\beta \bar{M}_c^\gamma \cdots P_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\rho} \cdots \quad (5.7)$$

として変換されるものである。（ただし階数がゼロの場合は、 $\text{Abs}[\bar{M}]/\bar{M}$ の因子だけになる。これが擬スカラである。）

(5.7)式が、他の書物で、さまざまに議論されている「特殊相対論的擬テンソル」の、Riemann 幾何学にもとづく正確な定義である。

「絶対値をとる」と言う $\text{Abs}[x]$ の様な演算は、FORTRAN の様なコンピュータ言語では、非常にありふれたものであるが、理論物理学上、かなり、取り扱いがむずかしい演算である。

一方、「右手系から左手系への変換に際して、ある種のベクトル（軸性ベクトル）の実空間における向きの定義を反対にしなければならない。」ことに関して、私は、Feynman のようには楽観的にはなれない。⁽¹⁴⁾（彼は、右手系で、右手の法則で定義される量は、すべて、座標系が、右手系から左手系に座標系を変換した際には、左手の法則で定義しなおすべきだと主張している。）

有能な、実験物理学者達は、たとえば、磁場 \mathbf{H} の向きを、実験によって、充分自信を持って定義できる。彼等に、「今度、解析上、座標系を左手系に変更したので、その向きの定義を反対にせよ。」と説得することは筋ちがいである。我々は、物理学上の現象を記述する言語として数学を採用したのであり、数学上の都合で物理現象が左右されるはずはない。あきらかに、紙の上に書かれている物理現象の記述式が、不完全なのである。

何度も、言うように、擬テンソルが出現したのは、(5.5)式の演算において、Jacobian (\bar{M}) の符号に関する情報が失なわれたからである。これを救済するためには、 \sqrt{g} に、1 bit の符号に関する情報を追加するだけで充分である。

6. 座標系の符号の定義

「数学では、座標系を、右手系か左手系か識別できない。」ことは正しい。しかし、ある座標系（これを C 系と名付ける）と、それから、一般の座標変換によって導びかれるすべての座標系を、以下にのべるある特徴によって、二つの集合にわけることができる。どちらが、右手系かは、物理学者が選択すればよい。

ふつう、我々が何かの物理現象を解析する際（すくなくとも暗黙のうちに）、ある特定の座標系を基準とすることが多い。この系を C 系と呼ぼう。C 系のえらび方は Einstein の相対性原理

が正しければ、全く任意である。

C系において、下記のごとくに、三つの微小ベクトルを定義する。⁽¹⁵⁾

C系=(x^1, x^2, x^3) 系として

$$\begin{aligned} du^i &= (dx^1, 0, 0) \\ dv^j &= (0, dx^2, 0) \\ dw^k &= (0, 0, dx^3) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

ここで、次のごとき微小量を考える。

$$dC = e_{\mu\nu\rho} du^\mu dv^\nu dw^\rho \quad (6.2)$$

この量はC系においては、

$$dC = dx^1 dx^2 dx^3 \quad (6.3)$$

である。ここで(2.1)式で示されるような一般座標変換によってC'系に移ったとする。

ただし、

$$C' \text{系} = (x'^1, x'^2, x'^3) \text{系}$$

である。

このとき、 du^i etc. は互いにまじりあわされて(6.1)式で示されるような簡単な形ではなくなる。

$$\begin{aligned} du'^i &= (du'^1, du'^2, du'^3) \\ dv'^i &= (dv'^1, dv'^2, dv'^3) \\ dw'^i &= (dw'^1, dw'^2, dw'^3) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \right\} \quad (6.4)$$

ただし、これらは反変ベクトルであるから、

$$du'^i = M_\mu^i du^\mu \quad \text{etc.} \quad (6.5)$$

のような変換を受けるのである。

ここで、 e_{ijk} は、第3章で述べたとおり重み -1、共変 3 階のテンソル密度である。一方 $du^i dv^j dw^k$ は、三つの反変ベクトル成分の直積であるから、3階の反変テンソルである。したがって、(6.2)式で表わされる dC は重み -1 のスカラ密度である。

ここで、次のような定義をしよう。

【定義Ⅱ】

$$Dc \equiv dC$$

とおいて、 Dc を、この系の微分要素に関連する特性行列式を称する。

Dc は、3次元微小体積要素に関連する量であるが、 \sqrt{g} (後述のように正確には $\sqrt{\det g}$) が含まれていないので、一般には微小体積要素ではない。

du^i, dv^j, dw^k には、符号のとり方に任意性があるので、一般性を失うことなく、

$$dx^k > 0 \quad (k=1, 2, 3) \quad (6.6)$$

とおくことができる。

この場合、C系では、

$$Dc = dC = dx^1 dx^2 dx^3 > 0 \quad (6.7)$$

である。

次に、本論文の最も重要な定義を二つ掲げよう。

【定義Ⅲ】

Dc の符号を、この座標系の符号と呼ぶ。

$$\therefore \text{Sign}(Dc) = +1 \quad (6.8)$$

ただし、 $\text{Sign}(x)$ は、 x の符号を示す関数である。

Dc は、重み -1 のスカラ密度であるので、(3.7) 式において階数がゼロの場合（上、下の指標は全くない場合）にあたり (2.1) 式の座標変換に際して、

$$D'c = (\bar{M})^{-1} Dc = M Dc \quad (6.9)$$

のように変換される。

したがって、

$$\text{Sign}(D'c) = \text{Sign}(M) \times \text{Sign}(Dc) \quad (6.10)$$

である。

したがって、 $[\bar{M}, M < 0]$ であれば、 $D'c$ の符号は Dc に比して反転する。かくして、 $D'c$ の符号として、座標変換の係数より作る行列式の符号 (\bar{M} , M の符号) に関する情報は保存される。故に、 Dc , $D'c$ の符号をそれぞれ座標系 C , C' の符号と呼ぶことは適切であろう。

かくのごとくに、ある座標系 C において、座標系の符号をきめると、その系から (2.1) 式の一般座標変換によって導びかれる座標系のすべてを、座標系の符号に関して、プラス系とマイナス系のどちらかに分類できる。どちらを、右手系に対応づけるかは、任意性がある。しかし、実際には、我々は右手系のみで解析することが多いので（3次元空間の場合）プラス系を右手系に対応させた方が便利であろう。

次の定義も、重要である。

【定義IV】

共変基本テンソルから作られる行列式の平方根に、座標系の符号をつけたものを、下記のごとき記号であらわす。

$$\sqrt{\cdot\cdot g} \equiv \text{Sign}(Dc) \times \sqrt{g}$$

\sqrt{g} は、重み 1 の擬スカラ密度であったが、 $\text{Sign}(Dc)$ の存在によって $\sqrt{\cdot\cdot g}$ は、重み 1 の真のスカラ密度となる。

以上で、擬スカラにまつわる問題はすべて解決した。【定義 I】に、掲げられている擬テンソルにおいて、 \sqrt{g} の代りに $\sqrt{\cdot\cdot g}$ を代入すると、それらは、すべて真のテンソル（階数に応じて、真のスカラ、真のベクトル）となる。

7. 4 次元時空への拡張

3次元空間から、4次元空間へ Levi-Civita の記号の定義を拡張することは、一応、容易なことである。追加すべき座標を 0 番目とするか、4 番目とするか、学者によって流儀が異なるが、ここでは 0 番目としよう。⁽¹⁶⁾ これらの記号の指標は 4 つになり共変的 Levi-Civita の記号 e_{ijkl} と反変的記号 e^{ijkl} がある。各々成分の値の絶対値は、ゼロか 1 であり、

$$(0, 1, 2, 3) \rightarrow (i, j, k, l)$$

の置換が、偶置換か奇置換かによって符号が定まる。

しかし、Einstein が、我々の時空は異常 Riemann 空間である（基本テンソルから得られる行列式が負である）と主張し、これが学界の主流になったため厄介なことが生じた。共変的記号と反変的記号を、一つの物理量の、数学的に異なる表現と言う立場をつらぬくと、これらの記号の指標が同じ場合の符号を反対にしなければならない。注意深い物理学者は、皆、正確にこれを実行している。たとえば、Landau は、下記のごとくに定義している。⁽³⁾

$$\left. \begin{aligned} e^{ijkl} \\ -e_{ijkl} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 : (i, j, k, l) \rightarrow (0, 1, 2, 3) \text{ 偶置換の場合} \\ -1 : (i, j, k, l) \rightarrow (0, 1, 2, 3) \text{ 奇置換の場合} \\ 0 : i, j, k, l \text{ の中に同じものがある場合} \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

私の以前の論文においても、これを採用している。⁽¹⁹⁾

我々の時空が、正常 Riemann 空間であれば、このような、変なことにはならないが、その場合は、Maxwell の方程式が成立するように、何らかの仕掛けが必要である。⁽²⁰⁾ 本論文では、それについては、ふれない。(本論文では、「我々の時空は 4 次元異常 Riemann 空間である」と言う Einstein の学説に従って解析している。)

前述のように、Einstein の理論によれば、4 次元時空の共変基本テンソルより得られる行列式は負である。これを g_4 としよう。

$$g_4 \equiv \det[\text{Mat}[g_{\mu\nu}]] < 0 \quad (7.2)$$

それで、三次元の理論で、 \sqrt{g} を用いるところは、すべて $\sqrt{-g_4}$ を用いる習慣である。前章の理論を 4 次元化すると、

$$\sqrt{-g_4} = \text{Sign}(Dc) \times \sqrt{-g_4} \quad (7.3)$$

となる。(後述)

以下において、誤解のおそれのない場合は、4 次元を示す 4 という添字は省略する。

第 6 章の内容を 4 次元に拡張する。

$$C \text{ 系} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \text{ 系}$$

として、下記の微小ベクトルを定義する。

$$\left. \begin{array}{l} ds^i = (dx^0, 0, 0, 0) \\ du^j = (0, dx^1, 0, 0) \\ dv^k = (0, 0, dx^2, 0) \\ dw^l = (0, 0, 0, dx^3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{array} \quad (7.4)$$

これらの 4 つの微小ベクトルの作る行列式は C 系において、

$$dC = -e_{\mu\nu\rho\lambda} ds^\mu du^\nu dv^\rho dw^\lambda \quad (7.5)$$

また、特性行列式は、

$$Dc \equiv dC \quad (7.6)$$

である。(7.5) 式にあらわされる負号は、Landau 流の共変的 Levi-Civita の記号の定義から必然的につくものである。なお、4 次元時空においては、 dC は $d\Omega$ と書かれることが多い。

$$\therefore d\Omega = -e_{\mu\nu\rho\lambda} ds^\mu du^\nu dv^\rho dw^\lambda \quad (7.7)$$

C 系においては、

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (7.8)$$

$d\Omega$ の中に、Levi-Civita の記号が入っていることを気付かない場合は、いろいろと混乱を招くが、ここでは論じない。

物理系の Lagrangean を L とするとき、従来の変分法による解析の際の作用積分

$$I = \int L \sqrt{-g} d\Omega \quad (7.9)$$

は、本論文の主張によれば、

$$I = \int L \sqrt{\frac{\bullet\bullet}{-g}} d\Omega \quad (7.10)$$

と、書き改めなければならない。どうせ

$$\delta I = 0 \quad (7.11)$$

とおくのだから、どちらでもよい。と言うわけにはいかない。Lagrangean 解析によって得られた結果、(エネルギーテンソル、テンソル方程式等) に、しばしば $\sqrt{\frac{\bullet\bullet}{-g}}$ が残り、深刻な議論をする際には、これが重要となる。(擬テンソル式か、真のテンソル式か、と言う議論である。)

第 3 章末尾の「この、重みマイナス 1 のテンソル密度が、一部の理論家の予想に反して、すでに、暗黙のうちに、理論物理学に登場している。」と言うコメントは、(7.7) 式の $d\Omega$ のことである。4 次元時空における、座標に関する四重積分の際の四次元微小体積要素、 dV は、

$$\begin{aligned}
dV &= \sqrt{\frac{\ddot{\dot{g}}}{-g}} d\Omega \\
&= \sqrt{-g} \times (-e_{\mu\nu\rho\lambda}) \times (ds^\mu du^\nu dv^\rho dw^\lambda) \\
&= (\text{重みプラス1のスカラ密度}) \times (\text{重みマイナス1の共変4階の} \\
&\quad \text{テンソル密度}) \times (\text{反変4階の微小テンソル}) \\
&= \text{微小スカラ}
\end{aligned} \tag{7.12}$$

であり、(7.10)式は、

$$I = \int L \sqrt{\frac{\ddot{\dot{g}}}{-g}} d\Omega \tag{7.13}$$

となり、積分すべき量は、微小スカラでなければならないと言う、電気磁気学演習の初步で習うとおりの形をしている。

従来の理論では、^{(17), (18)}

$$dV = \sqrt{-g} d\Omega \tag{7.14}$$

とおいた。これは、前述のように、 $\sqrt{-g}$ の性質により擬スカラであり、この呪いから逃れるために、良心的な理論家は、四苦八苦することになるが、結局は、解決ができない。⁽²⁾

4次元時空においては、時間軸が加わるために、右手系とプラス系の対応が、はっきりしなくなる。これに対しては、プラス系を偶系(even系)、マイナス系を奇系(odd系)と呼ぶような対策を考えられる。ただし、時間軸の反転をもたらすような座標変換を考えないのであれば、3次元空間における右手系、左手系の概念が意味をもつ。

なお、以上の議論よりすれば、「テンソルに $\sqrt{-g}$ をかけるとテンソル密度となる。」と言う説明は正しくない。そうすると、擬テンソル密度が得られるのである。重みプラス1のテンソル密度を得るために、テンソルにかけるべき量は、 $\sqrt{-g}$ ではなくて $\sqrt{\frac{\ddot{\dot{g}}}{-g}}$ であることは、本論文を読むと明白であろう。

これに関連して、「積分するとスカラとなる量をスカラ密度と言う」と言う命題は、丸暗記しやすいのかも知れないが、適切でない。あきらかに、重みプラス1のスカラ密度しか考えていず、このため「重みマイナス1のテンソル密度は変な量である。」と言うような前述の誤った観念の生れる下地を作っている。(7.10)式のLagrangean解析における作用積分を例にとり解説しよう。

上記の考えは、あやまった考え方

$$\begin{aligned}
I &= \int (L \sqrt{\frac{\ddot{\dot{g}}}{-g}}) \times d\Omega \\
&= \int (\text{重みプラス1のスカラ密度}) \times \text{座標の微分の直積}
\end{aligned} \tag{7.15}$$

から生れた様である。(実は、(7.7)に示すように $d\Omega$ は座標の微分の直積ではない。)

これは、(7.13)式のごとくに、

$$\begin{aligned}
I &= \int L \times (\sqrt{\frac{\ddot{\dot{g}}}{-g}} d\Omega) \\
&= \int \text{スカラ} \times \text{微小スカラ} \\
&= \int \text{微小スカラ}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

と考えるのが適切なのである。つまり、この積分は、微小スカラを積分するとスカラとなるという、ごくあたりまえの式なのである。スカラ密度としての $\sqrt{\frac{\ddot{\dot{g}}}{-g}}$ の重みプラス1は、 $d\Omega$ の重みマイナス1に打消されてしまっているのである。したがって、重みマイナス1のスカラ密度は、重みプラス1のスカラ密度と同程度に重要な量である。

8. その他の問題点

読者諸君が、座標系の符号と言う「めんどうなもの」を、物理学にもちこんだことに好意的であるとは私は考えていない。だから、若干弁解しておこう。我々が興味を持つ座標系は、そう多くはない。⁽¹³⁾ それらの間の座標変換に際して、我々は、新しい座標系も右手系であるように新座標変数をえらぶのがふつうの常識である。これは、常に

$$M, \bar{M} > 0 \quad (8.1)$$

を意味する。だから、今までの解析法を変える必要は、ほとんどない。ただ、 \sqrt{g} , $\sqrt{-g}$ の代りに $\sqrt{\dot{g}}$, $\sqrt{-\dot{g}}$ と書き、それが座標系の符号を含むことを記憶にとどめておけば、それでよい。

それでは、ほとんど無意味な形式論であるかと言うと決してそうではない。前回の論文⁽¹⁹⁾において、2階の反対称テンソルの dual テンソルと言う概念を、使用した。

すなわち、

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (8.2)$$

のとき、

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} &\equiv \text{dual}(F_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} e^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \end{aligned} \quad (8.3)$$

しかし、理論家は、この式をひと目みて、 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ は擬テンソルだから、この理論には欠陥があると言うであろう。

実は、前回の論文では、

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} &\equiv \text{dual}(F_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-\dot{g}} e^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \end{aligned} \quad (8.4)$$

と書きなおさないと、完全な理論にはならないのである。

このように、本論文は、この種の理論の正しさを保証するものである。

なお、この段階においても、なお不服の方々が、おられるかも知れない。「軸性ベクトルには、必ず回転軸がからんでおり、したがってそれは、極性ベクトルとは峻別すべきである。」と。しかし、私は、それは物理学の問題なのだと言っているのである。物理学上は、極性ベクトル、軸性ベクトルの言葉を残しておいても、私は、さしつかえないと思う。しかし、それは、数学的には、いずれも（本論文どおりに軸性ベクトルの定義を改めれば）真のベクトルなのである。

[結 言]

本論文により、我々は、ひとつのタブーから解放された。これにより、我々は Levi-Civita の記号をもっと自由に使いこなすことができるようになるであろう。

なお、本論文においては、ある座標系の符号が、ひとつの座標系全域で、同一である場合のみについて論じた。しかし、特異面を境界として符号が変る場合にも対応できると思われる。いずれにせよ応用数学としては、この程度で充分であろう。より厳密な検討は数学者にゆだねられる。

[参 考 文 献]

- (1) 村田茂昭、「4次元時空の基本テンソルと重力場の4次元スカラの関係について ——H. Yilmaz's 1958 理論の再検討——」，札幌大学女子短期大学部紀要 21号, pp. 21~28 1993.3

- (2) たとえば, 平川浩正, 「相対論第2版」, §4.9 共立出版
- (3) L.D. Landau and E.M. Lifshitz: "The Classical Theory of Field", The 4th Revised English Edition pp. 16~18, PERGAMON PRESS (1987)
- (4) 伊理正夫, 韓太舜, 「テンソル解析入門」教育出版, (冒頭の文)
- (5) 森口他, 「数学公式I」, §I-1, 岩波書店
- (6) 山内, 内山, 中野, 「一般相対論および重力の理論」増補版, 裳華房 この文献では, おもみプラス1とマイナス1のテンソル密度しかとりあつかっていない。ただし, このような事態は, 上記の著者の1人が後日出版した次の著書, 文献(7)で, 大幅に改善された。
- (7) 内山, 「一般相対論」, §10, 裳華房
- (8) 松本, 「計量微分幾何学」, §13, 裳華房 この文献では, 重み w の相対テンソルと称している。
- (9) 伊理, 韓, §11.1
ただし, Jacobian の定義は, 本論文と反対である。なお, 私の所有している版では, テンソル密度は, Jacobian の代りにその絶対値があらわれる。絶対値の記号と, 行列の記号と, 行列式の記号が混亂しているように思われる。それとも, 「テンソルは $\sqrt{-g}$ をつけると, テンソル密度になる」と言う迷信のせいか? (本論文第7章参照) ただし, 私は, この書物の最新の版を, まだチェックしていない。
- (10) 山内, 内山, 中野「一般相対性および重力の理論, 増補版」, §7, 裳華房
- (11) C. MØLLER, "The Theory of Relativity" 2nd Ed., §4.11, Clarendon Press-Oxford
- (12) MØLLER, 2nd Ed., §9.4
- (13) P. Moon, D.E. Spencer, "Field Theory Handbook", 2nd Ed., Springer-Verlag
- (14) R.P. Feynman 他, 原著 The Feynman Lecture on Physics Vol. I §52-5, Addison Wesley 和訳, 富山訳, 「ファインマン物理学」, Vol. II §27-5, 岩波書店 (原著と和訳では, 卷, 章が全く異なることに注意を要する。)
Feynmanによれば, 「右手系で, 右手の法則にしたがって定義された物理量は, 座標系を左手系に変換した際には, 左手の法則にしたがって定義しなおすべきである。」と言うことになる。本論文は, 物理現象のベクトルとしての向きは, 紙の上の表現法とは無関係であるから, Feynmanのような考えはおかしいと主張している。
- (15) MØLLER, 2nd Ed. ちがう例題であるが発想は似ている。
- (16) 平川, §4.9
- (17) MØLLER, 2nd Ed., §9.4
- (18) 平川, §4.9
- (19) 村田茂昭, 「相対論的電磁界方程式の対称化について」, 札幌大学女子短期大学紀要 22号, pp. 11 ~20 1993.9
- (20) 村田茂昭「電磁場に関する新理論」電気学会, 電磁界理論研究会資料 EMT-85-37 (1985)