

# インパルス応答にもとづく線形定数系の パラメータ決定法について

村 田 茂 昭

## まえがき

インパルス応答（一般にはインパルス応答行列…Weighting Sequence）が与えられた場合の、（ミニマムな系の）パラメータ決定法については既に各種発表されているが、これらのうちいくつかを統一して明快な形で述べることができたのでここに発表する。なお、多入力多出力系への応用も考えられるが、ここでは、一応一入力一出力系の場合に限る。

## 1. Weighting Sequence に基づく方法

### 1.1 Weighting Sequence と系のパラメータ

ここでは、まず説明の便宜のために、系の伝達関数に  $m$  重極が一つだけある場合について述べよう。伝達関数の分子の次数が分母よりも一次以上低いものとすると伝達関数を部分分数に展開して式 (1. 1) の如くになる。

$$G(s) = \sum_{j=1}^m \frac{K_j}{(S+a)^j} \quad (1. 1)$$

ここで、 $m$ ,  $K_j$ ,  $a$  が未知数である。サンプル間隔を  $T$  とし、インパルス応答を  $w(t)$  とする。時刻  $t=T_1$  よりサンプリングを始めると、Weighting Sequence は下記の形にかかりる。

$$\begin{aligned} C_k &= w(T_1+kT) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ &= \sum_{j=1}^m K_j \frac{(T_1+kT)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-a(T_1+kT)} \end{aligned} \quad (1. 2)$$

$C_k$  が充分な数 ( $\geq 2m$ ) だけ与えられたとき、 $m$ ,  $K_j$ ,  $a$  を決定するのがここでの問題である。 $m$  については後でふれることにし、 $K_j$ ,  $a$  を求める方法につきまず説明する。

### 1.2 ジョルダンの標準形

式 (1. 1) で示される伝達関数をもつ系をブロック線図に描くと図1のようになる。ここ

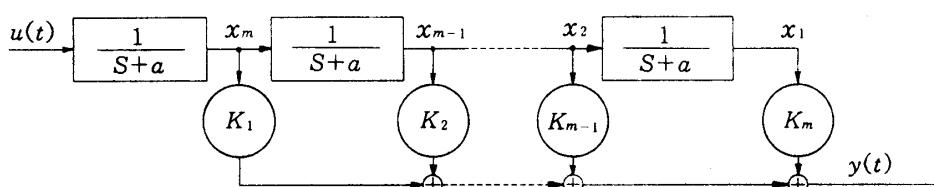


図1 伝達関数が式 (1.1) で与えられる系の構造図

で、入力  $u(t)$ 、出力  $y(t)$ 、 $m$  個の状態変数  $x_j$  を図のように取ると、状態方程式は、下式のごとくになり、係数行列  $A$  はジョルダンの標準形となる。

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU \quad (1.3)$$

ただし  $X = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$$U = u(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} -a, & 1, & 0, & \cdots, & \cdots, & 0, & 0 \\ 0, & -a, & 1, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\ \vdots, & \ddots, & & & & \vdots, & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & -a, & 1 \\ 0, & 0, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & 0, & -a \end{pmatrix}$$

$$B = \text{col}[0, 0, \dots, 1] \quad (m \text{ 行 } 1 \text{ 列})$$

出力方程式は

$$Y = KX \quad (1.4)$$

ただし  $Y = y(t)$

$$K = [K_m, K_{m-1}, \dots, K_1]$$

となる。したがってインパルス応答  $w(t)$  は

$$w(t) = K \cdot \Phi(t) \cdot B \quad (1.5)$$

ただし  $\Phi(t) = e^{At}$

$$= \begin{pmatrix} e^{-at}, & te^{-at}, & \frac{t^2}{2}e^{-at}, & \cdots, & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-at} \\ 0, & e^{-at}, & te^{-at}, & \cdots & \vdots \\ 0, & 0, & e^{-at}, & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots, & \cdots & e^{-at} \end{pmatrix}$$

となる。一方

$$\Phi(T_1 + T_2) = \Phi(T_1) \cdot \Phi(T_2) = \Phi(T_2) \cdot \Phi(T_1) \quad (1.6)$$

であるから

$$\begin{aligned} C_k = w(kT + T_1) &= K \cdot \Phi(kT + T_1) \cdot B \\ &= K \cdot \Phi(kT) \cdot \Phi(T_1) \cdot B = K \cdot P^k \cdot \Phi(T_1) \cdot B \end{aligned} \quad (1.7)$$

ただし

$$P = e^{AT} \quad (1.8)$$

行列  $P$  は、 $m$  重の固有値 ( $e^{-aT}$ ) をもつから、その固有方程式は  $m$  重根 ( $e^{-aT}$ ) をもつ  $m$  次式である。

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m = 0 \quad (\alpha_m \neq 0) \quad (1.9)$$

この式の左辺に  $P$  を代入する ( $x$  の位置に行列  $P$  を入れる) と零行列となる。

$$\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{P} + \alpha_2 \mathbf{P}^2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{P}^m = \mathbf{O} \quad (1.10)$$

ただし、 $\mathbf{O}$  は、 $m$  次の零行列、 $\mathbf{E}$  は  $m$  次の単位行列である。

### 1.3 系のパラメータに関する連立高次代数方程式

式 (1. 2) を下記のごとくに書き直す。

$$C_k = \sum_{j=1}^m q_j (T_1 + kT)^{j-1} z^k \quad (1.11)$$

$$\text{ただし } q_j = \frac{K_j}{(j-1)!} e^{-\alpha T_1}$$

$$z = e^{-\alpha T}$$

これが  $C_k$  が与えられたときパラメータを決定するために解くべき式であり、未知数は  $z$  と  $q_j (j=1 \sim m)$  である。 $(m$  についてはあとで述べる。)

$z$  は  $P$  の固有値であるので、これを求めるためには、 $\alpha_k (k=0 \sim m)$  を知る必要がある。つぎのような式を作って見ると、これは、式 (1. 10) によって零となる。<sup>(1),(2)</sup>

$$\begin{aligned} & \alpha_0 C_0 + \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_m C_m \\ &= \mathbf{K} \cdot (\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{P} + \alpha_2 \mathbf{P}^2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{P}^m) \cdot \Phi(T_1) \cdot \mathbf{B} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$C_k$  が  $L$  ( $\geq 2m$ ) 個与えられているものとし、上式を行列で表示して

$$\begin{pmatrix} C_0, & C_1, & C_2, & \cdots, & C_{m-1}, & C_m \\ C_1, & C_2, & C_3, & \cdots, & C_m, & C_{m+1} \\ \vdots & & & & \vdots & \\ C_{L-m-1}, & \cdots & & & C_{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = 0 \quad (1.13)$$

ここで、一般性を失わずに  $\alpha_m = 1$  とおけるから、上式で  $\alpha_k$  を定め得るためには  $C_k$  よりなる係数行列と、そのもっとも右側の列を除いた部分行列の位数 (rank) が、ともに  $m$  であることが必要充分条件である。実際には、 $m$  は未知数であり、その決定のためにこの必要充分条件が逆に利用される。すなわち図 2 のごとき無限行列を作り、その左上の部分の  $M \times M$  部分行列につき順次調べ、その行列式が零でない最大の部分行列が得られたとき、その位数  $M$  が  $m$  となる。このことは、式 (1. 12) より自明であるが、行列式を直接計算する（三つの行列の積の行列式に分解する）ことによっても証明できる<sup>(2)</sup>。

$$\begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & \cdots & \cdots \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_2 & C_3 & C_4 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_3 & C_4 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_4 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

図 2 Weighting Sequence よりつくられる無限行列

このようにしてまず、 $m$  が決定でき、つぎに、式 (1. 13) によって  $\alpha_k$  が決定できる。もし、データが充分多く得られるものとすれば、この段階で最少二乗法の形を使うのが適切であ

ろう。 $\alpha_m=1$  とおいて

$$\alpha = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{D} \quad (1.14)$$

ただし  $\alpha = \text{col} [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}]$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0, & \mathbf{C}_1, & \mathbf{C}_2, & \dots, & \mathbf{C}_{m-1} \\ \mathbf{C}_1, & \mathbf{C}_2, & \mathbf{C}_3, & \dots, & \mathbf{C}_m \\ \dots & & & & \dots \\ \mathbf{C}_{L-m-1}, & \dots, & \mathbf{C}_{L-2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = -\text{col} [\mathbf{C}_m, \mathbf{C}_{m+1}, \dots, \mathbf{C}_{L-1}]$$

つぎに、その  $\alpha_k$  を使用して、式 (1.9) を数値的に解くことにより  $z$  が定まる。(なお  $m$  重根が一つしかないことが判明しておれば、 $z$  を求めることはきわめて容易であるが、この節は、次節のための準備の節であることに留意されたい。)

$z$  が決定できると

$$\alpha = -\frac{1}{T} \log z \quad (1.15)$$

である。なお、一般には、 $z$  したがって  $\alpha$  は複素数である。

$z$  が得られると (1.11) 式は、 $q_j$  に関する単なる連立一次方程式であるので容易に  $q_j$  したがって  $K_j$  が求められる。なお、このとき、あきらかに変数の数 ( $m$ ) よりも式の数 ( $L \geq 2m$ ) のほうが多いため最小二乗法の形にすることができる。

#### 1.4 一般の場合

一般には、伝達関数の極は、いくつかの単極といいくつかの多重極よりなる。ここで、 $m=1$  のときは単極であるとみなし、 $m$  重極が  $n$  個あるものとする。

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{K_{ij}}{(s+a_i)^j} \quad (1.16)$$

この場合の系の次数  $N$  は

$$N = \sum_{i=1}^n m_i \quad (1.17)$$

である。Weighting Sequence は下記の如くになる。

$$\begin{aligned} C_k &= w(T_1 + kT) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij} \frac{(T_1 + kT)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-a_i(T_1 + kT)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

いっぽう状態方程式の係数行列は下記のごとくになる。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1, & \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & \mathbf{A}_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \\ \mathbf{O}, & \dots, & \mathbf{A}_n \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

ただし

$$\begin{aligned} m_k=1 \text{ のとき} \quad & \mathbf{A}_k = [-a_k] \\ m_k \geq 2 \text{ のとき} \quad & \mathbf{A}_k = \left\{ \begin{array}{ccccc} -a_k, & 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & -a_k, & 1, & \ddots & \cdots \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0, & \cdots & & , & -a_k \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{B} = \text{col}[\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m_1 \text{ 行}}, \underbrace{1, 0, 0, \dots, 0}_{m_2 \text{ 行}}, \dots, \underbrace{0, 0, \dots, 0, 1}_{m_k \text{ 行}}] \quad (1.21)$$

である。また、出力方程式の係数行列については

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_m] \\ \text{ただし } \mathbf{K}_k &= [K_{k,m_k}, K_{k,m_{k-1}}, \dots, K_{k,2}, K_{k,1}] \end{aligned} \quad (1.22)$$

となる。

したがって

$$\mathbf{P} = e^{AT} = \left( \begin{array}{cccc} e^{A_1 T}, & \mathbf{O}, & \cdots, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & e^{A_2 T}, & & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{O}, & \cdots, & \cdots, & e^{A_m T} \end{array} \right) \quad (1.23)$$

とすれば、前節の手法は、容易に一般の場合に拡張できる。

したがって、一般の場合には、伝達関数の極（係数行列の固有値）の配置に関して、何らの予備的な知識なしに Weighting Sequence より作る無限行列（図2）より次数  $N$  を定め、これによって式 (1.14) より  $a_k$  を定め得る。その  $a_k$  を用いて式 (1.9) を数値的に解くことにより、多重の固有値の有無等が判明する。実際には、数値計算の際に、ある基準をもうけて、いくつかの固有値がその基準よりも、おたがいに近付いたときは、多重の固有値とする様な方策が必要である。

固有値  $\exp(-a_k T)$  が得られると、直ちに  $a_k$  が得られ、その分布状況にしたがって、前節と同様な手法によって  $K_{ij}$  が定められる。

## 2. インパルス応答の微分値またはモーメントを用いる方法

### 2.1 一般化した操作

前述の手法を考察すれば、インパルス応答  $\mathbf{K} \cdot e^{At} \cdot \mathbf{B}$  よりある操作（この場合は等間隔のサンプリング）により  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^k \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}$  の形を得ていることが要点であることが分かる。ただし、この場合は

$$\mathbf{F} = \Phi(T_1)$$

である。

よってつきの条件を満たす操作  $L_k\{\cdot\}$  があれば

$$C_k = L_k\{w(t)\} \quad (2.1)$$

とすることによって、第1章の主要部分はそのまま適用できる。

◇条件1. ジョルダンの標準形をしている行列  $A$  にたいし

$$L_k\{\mathbf{K} \cdot e^{At} \cdot \mathbf{B}\} = \mathbf{K} \cdot L_k\{e^{At}\} \cdot \mathbf{B}$$

が成り立つ。ただし  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{B}$  は定行列である。

◇条件2.  $L_k\{e^{At}\} = \mathbf{P}^k \cdot \mathbf{F}$

ただし  $\mathbf{F} \neq \mathbf{O}$  また  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P}$  の各要素は,  $\mathbf{P}$  の固有値より簡単に計算できること

この様な条件を満たす操作としては前章で述べた等間隔のサンプリングのほかにつぎの二つが考えられる<sup>(3)</sup>,<sup>(4)</sup>。

$$\textcircled{1} \quad L_k\{\ } = \frac{d^k}{dt^k} \left\{ \right\}_{t=T_1} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

ただし  $k=0$  は引関数自身を示す。

$$\textcircled{2} \quad L_k\{\ } = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty \left\{ \right\} t^k dt \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

## 2.2 インパルス応答の微分値を用いる方法

これは

$$C_k = \left[ \frac{d^k}{dt^k} w(t) \right]_{t=T_1} \quad (2.2)$$

とする方法である。この方法は、インパルス応答が、解析的な形で与えられている場合とか、何らかの間接的方法で微分値が得られる場合以外は実際的ではない。なぜならば、数値微分を実行することは、数値計算上のノイズを増加することになるからである。しかし、理論的には重要があるので、ここに掲げる。

前章の終に、系の伝達関数に  $m$  重極が一つだけある場合につき論すれば、一般の場合への拡張は容易であることを述べた。したがって、ここでも、 $m$  重極が一つだけある場合につき、式(2.2)の操作が、条件1, 2を満たすことを証明すれば充分である。

条件1については、微分演算子の性質より自明である。よって、条件2について検討を進めよう。

$$\begin{aligned} L_k\{e^{At}\} &= \left[ \frac{d^k}{dt^k} \{e^{At}\} \right]_{t=T_1} \\ &= \mathbf{A}^k e^{AT_1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

であるから、

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{F} = e^{AT_1} \quad (2.5)$$

とすれば、条件2は満たされる。ただし  $\exp(AT_1) \neq \mathbf{O}$  であるよう  $T_1$  を選定する必要がある。簡単には  $T_1=0$  とすれば  $\exp(AT_1)=\mathbf{E}$  となりこれで充分である。 $(\mathbf{A}$  の固有値は、一般には複素数であるからこの注意が必要である。)

以下、前章と同様な手法によって、まず、 $P$  の固有値  $-a$  が定められる。つぎに

$$C_k = \mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^k \cdot e^{AT_1} \cdot \mathbf{B} \quad (2.6)$$

を、 $K_j$  に関する連立方程式として解くことにより  $\mathbf{K}$  が定まる。

## 2.3 インパルス応答のモーメントにもとづく方法

この方法においては、下式のごとくに  $C_k$  を定める。

$$C_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty w(t) t^k dt \quad (2.7)$$

前節と同様にして、系の伝達関数に、一つの  $m$  重極がある場合につき論すれば充分である。また、積分演算子の性質より、この操作が、条件 1 を満足することは自明である。したがって条件 2 につき検討を進める。

$$\int e^{At} t^k dt = A^{-1} \cdot e^{At} t^k - kA^{-1} \int e^{At} t^{k-1} dt \quad (2.8)$$

$$\int_0^\infty e^{At} dt = A^{-1} \cdot [e^{At}]_0^\infty = -A^{-1} \quad (2.9)$$

ただし、伝達関数の極 ( $A$  の固有値) は、複素平面上において、虚軸を含む右半面にはないものとする。(2.8) と (2.9) 式より

$$\int_0^\infty e^{At} t^k dt = (-1)^{k+1} k! (A^{-1})^{k+1} \quad (2.10)$$

ただし前記の条件より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} t^k = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

$$\therefore R_e\{a\} > 0$$

としている。ただし  $R_e\{\cdot\}$  は実数部を表わす。したがって

$$\frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty e^{At} t^k dt = (A^{-1})^k (-A^{-1}) \quad (2.12)$$

より

$$P = A^{-1} = -\frac{1}{a^m} \begin{pmatrix} a^{m-1}, & a^{m-2}, & \dots, & a, & 1 \\ 0, & a^{m-1}, & \dots, & a^2, & a \\ \vdots & & \ddots & & \dots \\ 0 & \dots & & & a^{m-1} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$F = -A^{-1} \quad (2.14)$$

とおけば、条件 2 は満たされる。

したがって固有値の計算は、前章の方法がそのまま適用できる。つぎに

$$C_k = -K \cdot (A^{-1})^{k+1} \cdot B \quad (2.15)$$

を、 $K_j$  に関する連立一次方程式として解くことにより  $K$  が定められる。

なお (2.10) 式の導出にあたり、伝達関数の極は、複素平面上の右半面のみならず、虚軸上にも存在してはいけないとした。これは、既に述べた二つの例にはなかった制限である。しかし、もともとインパルス応答  $w(t)$  の算出法自体が、この制限を受けていることが多いので、この方法が、他の二つの方法に比して、とくに劣るとは言えない。むしろ数値積分の性質より、周波数の高い（数値計算上の）ノイズの影響が少なくなり、 $w(t)$  にノイズが混入している場合はよい方法であると思われる。たとえば、系の次数の決定には、行列の位数 (rank) を数値的に求めなければならないが、この場合には、とくにノイズの影響が問題となる。

### む　す　び

以上、三つのパラメータ決定法が、統一した形で説明できることを論じた。また、得られた結果は、古典制御理論でも近代制御理論の立場からでも利用しやすいものであると考える。なお、残された実際的な部分についてもさらに検討を進めていく予定である。

## 参考文献

- (1) 村田茂昭：「Weighting Sequence より伝達関数を決定する新方法」電子通信学会論文誌（C）53-C. 9, p. 671 (昭45. 09)
- (2) 村田茂昭：「Weighting Sequence より伝達関数を決定する方法（多重極のある場合）」電子通信学会論文誌（C）54-C, 1, p. 91 (昭46. 01)
- (3) Bruni, C; Ishidori, A; Ruberti, A "On the Realization of Linear Time-Invariant Systems by the Method of the Moments" IFAC KYOTO SYMPOSIUM 3-1, p. 30 (1970. 8)
- (4) Ishidori, A : "Comparison between the ALGORITHMS for Computing the Order of Linear Systems" ibid 3-3, p. 40 (1970. 8)