

一次元 RC 回路網による地温の解析

和田 昭 夫

Abstract

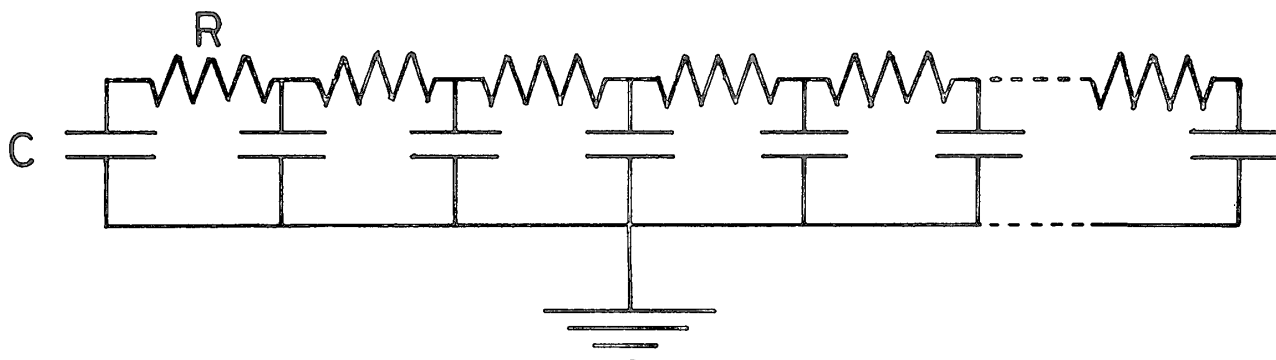
The author tried to determine the ratio of Newton's cooling constant to heat conductivity, h and thermal diffusivity K by means of one dimensional RC networks. At the same time, the author investigated the meaning of the apparent h in the field at some weather conditions. In conclusion, h contains the effect of soil evaporation. By the analysis of data, h was found to be extremely small at the surface which is covered by heavy vegetations.

§ 1. 序 言

土壌の熱的な定数特に熱拡散係数, K あるいはニュートンのクーリングの定数, H を求めることは, 野外で土を採取して実験室で行われたり⁽¹⁾, 直接野外で行われたりしているが, 前者は, 土の扱い方による土の構造等の変化に問題があり, 後者が理想的であるが, 従来の方法は, 主として, 少なくとも一日間の気温及び地温の Data より, 日変化の較差を利用したの数値計算によるものである⁽²⁾. 筆者は, 一時刻の比較的浅い深さの, 2つあるいは3つの Data から, K 及び, H を熱伝導率 h で割った値 h を, 一次元 RC 回路網を用いて求める試みを行なった。(尚, h については, 福富により, 一時刻の 1 m 深と 50 cm 深の地温から, 温泉地における値が求められている⁽³⁾.) さらにこの方法の適用範囲を, 若干の気象条件に対して考察した。

§ 2. 一次元 RC 回路網とその原理

非定常熱伝導の 1 次元問題は, その解が, 第 1 図で示される回路網により, 温度が電圧に対応して求められることは, 既に知られている⁽⁴⁾. 実験において用いられた回路網は, 抵抗値 $R=100\Omega$ の抵抗と, 容量 $C=0.001\mu F$ のコンデンサーが各々 34 個組合されたものと, $R=1K\Omega$ 及び $C=0.01\mu F$ が, 各々 14 個組合されたものとが結びつけられたもので, 一端に, 発振器より正弦波電圧がかかり, 各点の電圧は, オシロスコープで読みとるようになっている。



第1図 一次元 RC 回路網

熱伝導の一次元非定常問題の式, $\frac{dv}{dt} = K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \dots\dots(1)$ は, 一次元 RC 回路網において成立する式, $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{RC} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \dots\dots(2)$ に対応する。

ここで v は温度, E は電圧, x は地表面からの深さである。野外における一日は, RC 回路網において, 10^{-3} sec の order 以上に縮小されているので, それに応じて, 他の次元の数量の縮小を考えなければならない。それは次のようにして, 次元式を考えることにより求められる。非定常一次元の熱伝導の式 (1) の次元式は, $\frac{[v]}{[t]} = [K] \frac{[v]}{[L]^2} \dots\dots(3)$ 一次元 RC 回路網においては, 式 (2) の次元式は, $\frac{[E]}{[t]} = \frac{1}{[RC]} \frac{[E]}{[L]^2} \dots\dots(4)$ 長さの単位を, (1) 式と (2) 式で等しくとれば, (3) 式と (4) 式とで, t の縮小率と $1/K$ の縮小率を等しくしなければならない。

§ 3. Data 解析の方法

今気温の変化部分即ち日気温変化より日平均気温を引いたものを, $A \sin (wt - \epsilon)$ で表わし, 土は無数の深さまで一様な K を有していると仮定する。その時, 地表面温度の変化部分は, ほぼ $A' \sin (wt - \epsilon)$ で表わされることは, 以下のようにして証明される。既に知られているように, ⁽⁵⁾ 地表面温度 $v_{x=0}$ は次式で表わされる。

$$v_{x=0} = \frac{h}{\sqrt{(h+w)^2 + w'^2}} \sin (wt - \epsilon - \delta) + \frac{2Kh}{\pi} \int_0^\infty \frac{(w \cos \epsilon - Ku^2 \sin \epsilon)}{(K^2 u^4 + w^2)(h^2 + u^2)} e^{-Ku^2 t} u^2 du \dots(5)$$

$$\text{ただし, } w' = \sqrt{w/2K}, \delta = \tan^{-1}[w'/(h+w')]$$

第 2 項は, t が十分大の時 0 に収斂する。実際の値及び予測される値を用いて, $h \doteq 0.1$, $w \doteq 10^{-5}$, $w' \doteq 0.03$ とすると, $w'/(h+w') \doteq \frac{0.03}{0.1+0.03}$ となり, 値は小さい。且つ正である。 h が極めて大きい場合を考慮すると, (5) 式第一項において, $\delta \doteq 0$ としてよい。実際の解には, (5) 式で与えられる $v_{x=0}$ に, 平均温度によって定まる地表面温度が加わるが, その値は, 時間に関して一定な値で, 温度変化を考える場合, それを考慮しなくてよい。実際に求められた今迄の Data も, 気温と, 地表温度の間の位相差が, ほぼ 0 であることを示している。⁽¹⁾

実際には, 長期にわたって, ほぼ同じ式で表わされる気温変化を示す Data は, なかなか得にくいのが, 以下において, 一日だけの Data から, 前述の条件, 即ち(5)式において, $t = \infty$ とみなしてよいか否かの判定方法を示す。

よく知られているように, 初期条件として, $t=0$ で $v=0$, $t>0$ で $v_{x=0} = A \sin (wt - \epsilon)$ で与えられた時の地温は,

$$v = Ae^{-x(w/2K)^{\frac{1}{2}}} \sin \left\{ wt - x \left(\frac{w}{2K} \right)^{\frac{1}{2}} - \epsilon \right\} - \frac{2A}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^{x/2(Kt)^{\frac{1}{2}}} \sin \left\{ w \left(t - \frac{x^2}{4K\mu^2} \right) - \epsilon \right\} e^{-\mu} d\mu$$

⁽⁵⁾ で与えられる。第 2 項は, t が十分大になると 0 に収斂し, 第 1 項が残る。この時位相差は, 深さ x に比例する。 t が十分大でない時, 第 2 項が残る, x^2 に比例する位相差が現れる。ゆえに, 位相差が x に比例するか否かで, t が十分大きいのか, 否か, が判定できる。

問題となる方程式及び境界条件は, 次の通りである。ただし, 前述の t は, 十分大きく, また, 1 m 深地温を, 日変化に対する不易層として加える。

$$I \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v = v_a = A \sin (wt - \epsilon) + v_m \quad \text{at air} \\ \frac{dv}{dx} = h(v - v_a) \quad \text{at } x=0 \\ v = T_1 \quad \text{at } x=100 \end{array} \right.$$

ただし, v_m は, 日平均気温, $h = \frac{H}{k}$

I の方程式及び境界条件を, 次の II と III に分解する。

$$II \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_2}{dt} = K \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \\ v_2 = v_a = A \sin (wt -) + v_m \quad \text{at air} \\ \frac{dv_2}{dx} = h(v_2 - v_a) \quad \text{at } x=0 \\ v_2 = 0 \quad \text{at } x=100 \end{array} \right.$$

$$III \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_3}{dt} = K \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} \\ v_3 = 0 \quad \text{at air} \\ \frac{dv_3}{dx} = hv_3 \quad \text{at } x=0 \\ v_3 = T_1 \quad \text{at } x=100 \end{array} \right.$$

II は, さらに分解して,

$$II' \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_2'}{dt} = K \frac{\partial^2 V_2'}{\partial x^2} \\ v_2' = v_m \quad \text{at air} \\ \frac{dv_2'}{dx} = h(v_2' - v_m) \quad \text{at } x=0 \\ v_2' = 0 \quad \text{at } x=100 \end{array} \right.$$

$$II'' \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_2''}{dt} = K \frac{\partial^2 V_2''}{\partial x^2} \\ v_2'' = v_a - v_m = A \sin (wt - \epsilon) \quad \text{at air} \\ \frac{dv_2''}{dx} = h\{v_2'' - (v_a - v_m)\} \quad \text{at } x=0 \\ v_2'' = 0 \quad \text{at } x=100 \end{array} \right.$$

II' + III = IV を考えると,

$$IV \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_4}{dt} = K \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2} \\ v_4 = v_m \quad \text{at air} \\ \frac{dv_4}{dx} = h(v_4 - v_m) \quad \text{at } x=0 \\ v_4 = T_1 \quad \text{at } x=100 \end{array} \right.$$

かくして, $I = II'' + IV$ となる。ところで定常状態の熱伝導の問題の場合, クーリングの条件は, $l = 1/h$ の長さの, 土と同じ K を有する地層を, 新たに地表面上に加えたのと同等になる⁽⁶⁾ので, IV は容易に作図で求められる。即ち, $x = -1/h$ において, v_m , $x = 100$ で T_1 の 2 点を結ぶと, その線上の $x \geq 0$ の値が, 各深さに応じた地温になる。II'' を, RC 回路網で求める。

II'' の解は、I と、IV だけの分即ちある直線だけの違いがある。Data の地温—深さの曲線と、RC 回路網により求められた電圧—深さの曲線を対比し、II'' の曲線が得られる周波数と IV の直線を決定し、それにより、既述の時間の縮小率と、 $1/K$ の縮小率とが等しいことを利用して、 K を決定し、IV の直線より、ニュートンのクーリング常数を決定する。求める値は2つであるから、2つ以上の地温の Data があればよい。II'' の曲線を、RC 回路網より得る方法は、次の通りである。オッシロスコープの水平入力に Time Scale として、気温変化に対応する電圧を入れ、垂直入力に、各深さの温度に対応する電圧を入れる。その時、一般に、オッシロスコープの螢光面に、楕円が画かれる。これより、一定時刻の温度に対応する電圧を読みとる。

1. 地表面からの蒸発

N. H. Dalton は、水の表面からの蒸発を次のように定めた。土からの蒸発は、水面からの蒸発に近似できる。

$$E_0 = 0.033f(v_w)(e_s - e_a) \text{ mm/day} \dots\dots(9)$$

ここで、 E_0 : 蒸発速度

e_s : 水面における平均の飽和蒸気圧

v_w : 地上 2 m における風速 mile/day

e_a : 露点における空気の平均水蒸気圧

e_s は、表面の平均温度により定まる。

(9) 式を変形すると、 $Q_1 = q(e_s - e_a) \text{ cal cm}^{-2} \text{ day}^{-1} \dots\dots(10)$ ただし、 $q: f(v_w)$ を含む常数

水の蒸気圧曲線を参照することにより、近似的に温度 v の比較的狭い区間で、 $e_s = av + b$ (a, b は定数) が成立するとすると、(10) 式は、 $Q_1 = s(v - d) \dots\dots(11)$ となる。ただし、 $s = aq$,

$$d = \frac{e_a}{a} - \frac{b}{a}$$

(11) 式をクーリングの式と合せると、次式が成立する。

$$\frac{dV}{dx} = h(v - v_a) + s'(v - d) = (h + s') \left(v - \frac{hv_a + s'd}{h + s'} \right) \dots\dots(12)$$

$$\text{ただし、} s' = \frac{s}{24 \times 60 \times 60}$$

(12) 式は、クーリングの式と同形である。 $h + s'$ を、みかけのクーリング常数とよべば、(12) 式は、蒸発の影響を含む一般の場合の、みかけのクーリングの式である。(12) 式を II' と IV に応じて分解すると、

$$\frac{dv_4}{dx} = (h + s') \left(v_4 - \frac{hv_m + s'd}{h + s'} \right) \dots\dots(13)$$

$$\frac{dv_2''}{dx} = (h + s') \left\{ v_2'' - \frac{h(v_a - v_m)}{h + s'} \right\} \dots\dots(14)$$

(14) 式を IV のクーリングの条件として、それに入れると、みかけのクーリング常数が決定する。この値を h' とすると、次式が成立する。

$$(h + s') \left(v_4 - \frac{hv_m + s'd}{h + s'} \right) = h'(v_4 - v_m)$$

$$\therefore h' = \frac{(h + s')v_4 - (hv_m + s'd)}{v_4 - v_m}$$

ゆえに、 h' は v_m 即ち平均気温の函数になる。

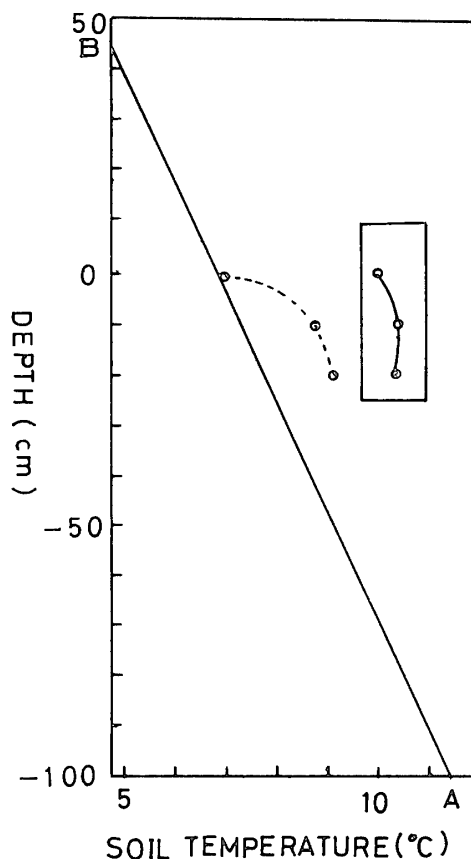
2. 水の浸透 (Infiltration)

降雨後しばらくの間は、土の表面から水の浸潤及び浸透が生ずる。かなりの時間、浸潤及び浸透する部分の含水量はほぼ一定とみてよい。^{(9),(10)} W を単位体積当たりの水分量とすると、 $\frac{\partial W}{\partial t}=0$ が成立する。また連続の条件から、 $\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x}=0$ が成立する。ここで q_x は、単位面積当たりの流量である。両式から、 $\frac{\partial q_x}{\partial x}=0 \therefore q_x=\text{constant.}$ ⁽⁹⁾ が成立する。即ち浸透量は、地層の各深さで等しい。(ただし、その深さには、下限がある。) 今、各深さで各時刻において土壌の水分と土粒子の温度が等しいと仮定する。浸透による熱移動は mass transfer なので、 $Q'=f \times v$ で表わされる。ここで、 f は浸透速度、 v は水温である。これを熱伝導の式と組合せると、 $Q+Q'=K \frac{\partial v}{\partial x} + f \times v$ となる。従って、この場合は今の解析方法を用いることはできない。

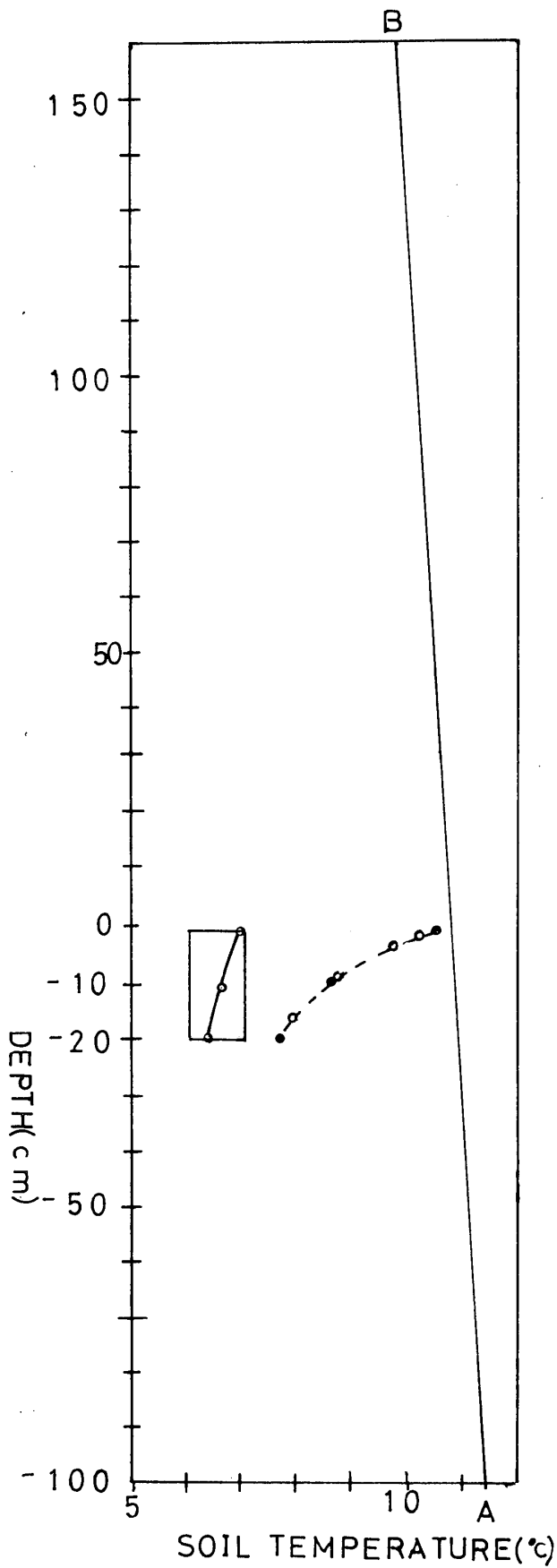
§ 4. 測定結果

Data は、札幌管区気象台における昭和 27 年 11 月 1 日 14 時に測定された地表面、10 cm、20 cm 深の地温と、札幌大学裏の敷地において、昭和 45 年 11 月 6 日、10 時半に植生のわずかな個所の 2 cm、9.5 cm、16.5 cm 深の地温と、同 13 時 55 分の、30 cm の植生のある個所の、4 cm、8 cm、11 cm 深の地温で、気象台における測定個所は、3 cm から 5 cm の柴が生えており、札幌大学裏においては、土はほとんど水飽和の状態 (20 cm 深以上の深さまで) にあり、土質は腐植土である。気象台における前述の日の一日間の Data を調べてみると、地温の遅れを表わす位相差が深さに大体比例している。札幌大学裏においては、ほぼ同様の気象状態の続いたあの日である。従ってこれらの Data は解析に対して適当であると判断した。

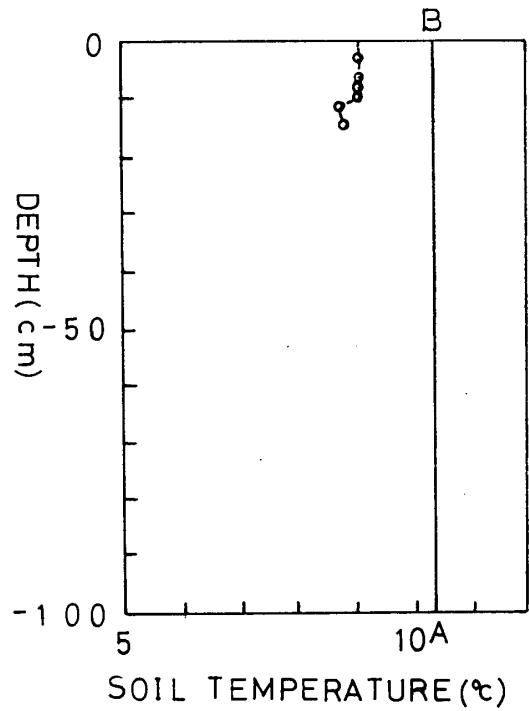
気象台の場合、RC 回路網における周波数は 20 KC であり、これにより K は $6 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{sec}$ と決定し、 h は、 2 m^{-1} と決定した。第 2 図にそれを示す。図において点線で表わした曲線は地温—深さを、図中囲ってある部分の中の実線はそれに対応する電圧—深さを表わす。また \overline{AB} は IV の解である。第 3 図、第 4 図の意味も同様である。札幌大学裏の場合、わずかの植生のある個所では周波数は 5 KC であり、 $K=2.3 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{sec}$ 、 $h=0.6 \text{ m}^{-1}$ と決定した。それを第 3 図に示す。30 cm の植生のある個所では、10 cm 深迄の Data を用いると、地温はほとんど等しく、従って h はほとんど 0 である。これを第 4 図に示す。



第 2 図 札幌管区気象台に於る地温及びその解析曲線



第3図 札幌大学裏敷地内に於る地温及びその解析曲線。わずかの植生がある。



第4図 札幌大学裏敷地内に於る地温。かなりの植生がある。

§ 5. 結 語

- (1) 野外で測定される放熱係数 h は蒸発の影響を含んでおり、それは日平均気温の函数である。
- (2) 植生の h に対する影響は極めて大きく、30 cm 位の植生になると h はほとんど0である。

終りに臨み、御助言をいただいた北大地球物理学教室陸水学講座の中尾欣四郎助手に厚く感謝の意を表します。

引用文献

- (1) L. D. Baver : Soil Temperature, Soil Physics, p. 362 (1956).
- (2) 八鍬利助 : 土壤水分量と地中温度, 農業及び園芸, 第 12 卷第 1 号.
- (3) 福富孝治 : 1 m 深地温についての 2, 3 の問題, 北大地球物理学研究報告, No. 9 (1962).
- (4) M. Jakob & G. A. Hawkins : Elements of Heat Transfer, p. 79 (1956).
- (5) H. S. Carslaw and J. C. Jaeger : Conduction of Heat in Solids (1959).
- (6) 藤木忠美, 和田昭夫, 小林大二 : 恵山火山北麓の温泉調査, 北大地球物理学研究報告, 第 14 号 (1965).
- (7) 鈴木清太郎 : 農業気象学, p. 178 (1961).
- (8) L. D. Baver : Soil Water, Soil Physics, p. 278.
- (9) 山崎不二夫 : 土壤物理, p. 137 (1969).
- (10) D. Hillel & W. R. Gardner : Transient infiltration into crust-topped profiles, Soil Science, Vol. 109 No. 2 (1970).