

経済と経営 18-1 (1987. 6)

〈論文〉

貨幣経済における最適均衡経路*

飯田 隆 雄

I はじめに

Ramsey-Koopmans タイプの最適成長モデルを貨幣経済にも適用し、その最適経路と貨幣の実物経済に与える影響を分析することは、貨幣成長理論の分野にとって重要な研究課題である。

この問題を取り上げた一連の研究成果を要約すると、

(I) 経済は定常状態に向う最適経路が必ず一つ存在する。

(II) 定常状態のもとで、貨幣供給率の増加は実物経済に影響を与えない。

すなわち、貨幣は「中立的」である。

ということであった (Sidauski (1967), Calvo (1970), Dornbush and Frenkel (1973), Hayakawa (1986-a))。

こういったモデルでは、ある代表的家計を考え、制約式に、資産のストックと、資産の各時点ごとの増加分を表わす二つの制約式のもとで、この家計

* 本稿は「理論・計量経済学会 (昭和 61 年 11 月 3 日, 於・名古屋大学)」で報告したものを加筆, 修正したものである。本報告の節, 討論者として有益なコメントを下された埼玉大学吉野直行先生はじめ, 名古屋学院大学早川弘晃, 南山大学森茂也, 飯原慶雄の各先生方に, 有益なコメントや, 御指導をいただきました。ここに紙面をおかりしてお礼申し上げます。

は消費と貨幣からなる異時点効用関数を極大化することによって、最適な実物資本と貨幣の組み合わせを決定する、という構造になっている。

ここで、定常状態となるための条件は、

資本労働比率にのみ依存する規模に関して収穫一定の生産関数のもとで、「資本の限界生産物は労働成長率と時間選好率との和に等しい」。同時に「貨幣と消費の限界代替率は時間選好率に等しい」。

というものであった。

また、貨幣が「中立的」となる根拠は

モデルの中で、家計にとって、期待インフレ率がパラメーターとして仮定されている。

ということにあった。すなわち、

この家計の効用関数のもとで、事前的に、この期待インフレ率が経済全体にどのような影響を及ぼし得るかということを経済全体を考慮するような価格メカニズムが、家計の最適化行動の中に組みこまれていないことに原因があった (Hayakawa (1986-b))。

そこで、本稿では、現実と期待の価格が一致するような価格に対する完全情報を家計は入手できるという前提にたって、その家計が価格構造の情報を事前的に組み入れて、家計の最適化行動を行うとき、

- [1] 定常状態となるための条件は、価格情報が家計の最適化行動を通して経済に及ぼす大きさだけ従来のものと異なる。
- [2] 定常状態における貨幣供給率の増加は、それにとまなう家計のインフレ期待が異なるかぎり実物経済に影響を与える。すなわち、貨幣は「非中立的」となる。
- [3] 定常状態において、貨幣供給率の増加とそれにとまなう家計のインフレ期待が等しい時のみ貨幣は「中立的」となる。

ということを示したい。

[記号]

W	: 代表的個人の Welfare
M_t	: t 時点における名目貨幣量
K_t	: t 時点における実物資本
P_t	: t 時点における現実の物価水準
L_t	: t 時点における総労働量
U	: 一人当りの効用
c_t	: t 時点における一人当りの実質消費
$m_t = M_t / P_t L_t$: t 時点における一人当りの実質現金残高
$k_t = K_t / L_t$: t 時点における一人当りの実質資本ストック
a_t	: t 時点における一人当りの総(実質)富の残高
$f(k_t)$: t 時点における一人当りの総生産物
y_t^d	: t 時点における一人当りの可処分所得
s_t	: t 時点における一人当りの実質貯蓄
$\theta_t m_t$: t 時点における一人当りの政府の移転支払い
$\theta = \dot{M}_t / M_t$: t 時点における名目貨幣成長率 ((28)以降)。
$n = \dot{L}_t / L_t$: t 時点における労働人口成長率
\dot{P}_t / P_t	: t 時点における現実の物価上昇率
π_t	: t 時点における期待物価上昇率
$E(\dot{P}_t / P_t)$: t 時点における現実の物価上昇率の期待値
λ_i, δ_t	: t 時点におけるラグランジュ乗数
$\dot{x} = dx_t / dt$	
$f_i = \partial f(x_i) / \partial x_i$	
$f_{ij} = \partial^2 f(x_i) / \partial x_i^2$	
$f_{ij} = \partial^2 f(x_i) / \partial x_i \partial x_j ; i \neq j, i, j = 1, 2$	
x_t	: ここで使用される全ての変数
t	: 時間 t

ρ : 時間選好率 (or 割引率)

II モデル

一国閉鎖経済を前提として、貨幣を無償で発行する政府と、企業と家計の両面を兼ね備える多数の個人が存在する。各個人は均一であり、その中の一人を取りあげて代表的個人と呼ぶことにする。財市場と貨幣市場が存在し、各市場は毎時点需要と供給が常に一致しているものとする。

代表的個人は、自己の富 (= 資産) を実物資本と実質現金残高に配分して保有する初期富と各時点における富の増加分を制約として、毎時点消費と実質現金残高からなる異時点効用関数のゼロから無限時点までの積分値、すなわち、これを個人の Welfare W と呼べば、この W を極大にするようこの個人は行動する。これによって、代表的個人の家計における最適な消費、実質現金残高、実物資本の経路が決定される。しかも、この個人は自分の経済活動が経済全体に与える効果を経験的に知っておりこの効果を予測しながら主体的行動を行うものとする。

代表的個人の Welfare W は、ゼロから無限時点までの異時点効用関数の積分値で表されるものとする。

$$(1) \quad W = \int_0^{\infty} U(c_t, m_t) e^{-\rho t} dt$$

$$\rho > 0 : \text{const. } m_t = M_t / P_t L_t$$

U : 一人当りの効用

c_t : t 時点における一人当りの実質消費

m_t : t 時点における一人当りの実質現金残高

M_t : t 時点における名目貨幣量

P_t : t 時点における総労働量

ρ : 時間選好率 (or 割引率)

ここで、効用関数は、連続で2回微分可能であり、以下の性質を満たすものとする。

$$(2-a) \quad U_c > 0, \quad U_m > 0$$

$$(2-b) \quad U_{cc} < 0, \quad U_{mm} < 0$$

$$(2-c) \quad U_{cm} = U_{mc} > 0 \quad \text{注)}$$

$$(2-d) \quad \lim_{c_t \rightarrow \infty} U_c = 0, \quad \lim_{c_t \rightarrow 0} U_c = \infty$$

$$\lim_{m_t \rightarrow \infty} U_m = 0, \quad \lim_{m_t \rightarrow 0} U_m = \infty$$

この個人は、 t 時点における一人当りの総富の残高 a_t を一人当り実物資本 k_t と一人当り実質現金残高 (= 貨幣) m_t に配分して所有することができるとする。

$$(3) \quad a_t = k_t + m_t \quad : \quad k_t = K_t / L_t$$

a_t : t 時点における一人当り総富の残高

k_t : t 時点における一人当り実物資本

K_t : t 時点における総実物資本

また、どの時点 t においても、個人の可処分所得 y_t^d は、 t 時点における一人当り総生産物 $f(k_t)$ と政府から無償で配分された移転支払い、すなわち、 t 時点における一人当りの貨幣の増加にともなう実質現金残高の増分 θm_t から t 時点における一人当りの現実の物価上昇による実質現金残高の減額分を考慮したものから構成されるものとする。

$$(4) \quad y_t^d = f(k_t) + \left(\theta - \frac{\dot{P}_t}{P_t}\right) m$$

さらに、この可処分所得は、どの時点 t においても 0 時点における一人当りの実質消費 c_t と実質貯蓄 s_t に配分されるものとする。

$$(5) \quad y_t^d = c_t + s_t$$

実質貯蓄 s_t は実物資産と貨幣で保有されるものとする。すなわち、 s_t は t 時点における一人当たり実物資本蓄積 \dot{k}_t と実質現金残高の増分 \dot{m}_t に労働人口成長率 n をそれぞれ考慮したものにひとしい。

$$(6) \quad s_t = \dot{k}_t + nk_t + \dot{m}_t + nm_t : n = \dot{L}_t / L_t$$

従って、(4) (5) (6)より $\dot{k}_t + \dot{m}_t$ は、

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{k}_t + \dot{m}_t &= nt - nk_t - nm_t = y_t^d - c_t - nk_t - nm_t \\ &= f(k_t) + \left(\theta - \frac{\dot{P}_t}{P_t}\right) m_t - c_t - nk_t - nm_t \end{aligned}$$

となる。

一方、 t 時点における一人当たりの総富の増加分 \dot{a} は、(3)を t で微分することによって得られる。

$$(8) \quad \dot{a}_t = \dot{k}_t + \dot{m}_t$$

よって、(7)(8)から \dot{a} は、

$$(9) \quad \dot{a}_t = f(k_t) + \left(\theta - \frac{\dot{P}_t}{P_t}\right) m_t - c_t - nk_t - nm_t$$

となる。

ここで、生産関数 $f(k_t)$ は、一次同次関数で、2回微分可能な連続関数、すなわち、通常の Well-behaved な新古典派生産関数であり、以下の性質を満足するものと仮定される。

$$(10-a) \quad \lim_{k_t \rightarrow 0} f(k_t) = 0, \quad \lim_{k_t \rightarrow \infty} f(k_t) = \infty$$

$$(10-b) \quad f'(k_t) > 0, \quad f''(k_t) < 0$$

$$(10-c) \quad \lim_{k_t \rightarrow \infty} f'(k_t) = \infty, \quad \lim_{k_t \rightarrow 0} f'(k_t) = 0$$

次に、個人は、自己の経済活動によって、物価水準がどのように変化するかを予想することができ、これを t 時点における期待物価上昇率 π_t として表すならば、 t 時点における一人当り実物資本 k_t と、実質現金残高 m_t 、ならびに、政府の政策パラメーターである名目貨幣移転支払い成長率 θ に依存する関数として定義することができる。ここで、個人は、実物資本が増加するような時は、インフレ的となり ($\pi_k > 0$)、反対に実物現金残高が増加するような時は、デフレ的 ($\pi_m < 0$) となるということを知っていると仮定する。また、単純化のため π_t の関数は連続で1階微分可能な線形関数を仮定する。

$$(11) \quad \pi_t = \pi(k_t, m_t; \theta); \pi_k > 0, \pi_m < 0$$

さらに、この個人の収集可能な物価情報は完全なものであるため、個人の物価上昇率に対する予測は常に現実の物価上昇率と一致すると仮定する。

$$(12) \quad \pi_t = E\left(\frac{\dot{P}_t}{P_t}\right) = \frac{\dot{P}_t}{P_t}$$

$E\left(\frac{\dot{P}_t}{P_t}\right)$: 現実の物価上昇率の期待値

異時点最適化問題の枠組みにおける個人の主体的均衡問題は(1)–(12)より以下のように表すことができる。

$$(13) \quad \text{Max} \int_0^{\infty} U(c_t, m_t) e^{-\rho t} dt$$

s. t.

$$(14-a) \quad a_t = k_t + m_t$$

$$(14-b) \quad \dot{a}_t = f(k_t) - nk_t - c_t + \{\theta - \pi(k_t, m_t; \theta) - n\} m_t$$

$$(15-a) \quad a_t > 0, c_t > 0, k_t > 0, m_t > 0, \text{ for all } t$$

$$(15-b) \quad a_0 > 0, c_0 > 0, k_0 > 0, m_0 > 0$$

よって、ラグランジアン L は以下のように定めることができる。

$$(16) \quad L = \int_0^{\infty} [U(c_t, m_t) + \lambda_t \{f(k_t) - nk_t - c_t \\ + \{\theta - \pi(k_t, m_t; \theta) - n\} m_t - \dot{a}_t\} \\ + \delta_t \{a_t - k_t - m_t\}] e^{-\rho t} dt$$

λ_t, δ_t : ラグランジュ乗数

最大化のための一階の条件と Transversality condition はそれぞれ次のようになる (see, Arrow-Kruz (1970) chap. II)。

$$(17-a) \quad U_c(c_t, m_t) = \lambda_t$$

$$(17-b) \quad U_m(c_t, m_t) \\ + \lambda_t \{\theta - \pi(k_t, m_t; \theta) - n - \pi_m(k_t, m_t; \theta) m_t\} = \delta_t$$

$$(17-c) \quad f'(k_t) - n - \pi_k(k_t, m_t; \theta) m_t = \delta_t / \lambda_t$$

$$(17-d) \quad \dot{\lambda}_t = \rho \lambda_t - \delta_t$$

$$(17-e) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a_t \lambda_t e^{-\rho t} = 0 \quad (\text{Transversality Condition})$$

煩雑さをさけるため以下では添字の t を省略する。

一階の条件から、未知数は 6 ($a_t, c_t, m_t, k_t, \lambda_t, \delta_t$), 方程式は 6 ((14-a) (14-b) (17-a) (17-b) (17-c) (17-d)) でありモデルは完結する。

次に二階の条件を求める。まず、準備のために (17-b) (17-c) より (18) を得る。

$$(18) \quad U_m + \lambda \{\theta - \pi(k, m; \theta) + (\pi_k - \pi_m) m - f'(k)\} = 0$$

(17-a) (18) (15-a) から、所与の時点 t における c, m, k の “derived demand function” が a と λ から成る関数として表すことができる。従って、

(17-a) (18) (15-a) を解くことによって

$$(19) \quad c = c(a, \lambda), \quad m = m(a, \lambda), \quad k = k(a, \lambda)$$

と表すことができる (See, Arrow-Kruz (1970), chap. IV)。

さて、(17-a) (18) (14-a)を全微分し、行列の形で表現すると、以下
のようになる。

$$(20) \quad M \cdot \begin{bmatrix} dc \\ dm \\ dk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\lambda \\ -\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f'(k) + n\}d\lambda \\ -da \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} U_{cc} & U_{cm} & 0 \\ U_{mc} & U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m) - \lambda(f''(k) + \pi_k) \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ここで (14-a) は両辺に -1 を掛けてある。

二階の条件が満足されるためには、以下の条件が満たされなければならない。
い。

《a》 1階の主座小行列式は全て負

$$(21-a) \quad \begin{cases} U_{cc} < 0, \\ U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m) < 0, \\ -1 < 0. \end{cases}$$

《b》 二階の主座小行列式は全て正

$$(21-b) \quad \begin{cases} -\{U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m)\} - \lambda\{f''(k) + \pi_k\} > 0 \\ -U_{cc} > 0, \\ U_{cc}\{U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m)\} - U_{cm}^2 > 0. \end{cases}$$

《c》 $\text{Det } M < 0$

$$(21-c) \quad \text{Det } M = -U_{cc}\{U_{mm} + 2\lambda(\pi_k - \pi_m) + \lambda f''(k)\} + U_{cm}^2 < 0$$

《a》~《c》が満足されるならば、 dc/da , $dc/d\lambda$, dm/da , $dm/d\lambda$, dk/da ,
 $dk/d\lambda$ はそれぞれ以下のようになる (計算(22))。

$$(22-a) \quad \frac{dc}{da} = \frac{1}{\text{Det } M} U_{cm} \lambda \{f''(k) + \pi_k\}$$

$$(22-b) \quad \frac{dc}{d\lambda} = \frac{-1}{\text{Det } M} [\{U_{mm} + 2\lambda(\pi_k - \pi_m) + f''(k)\} \lambda \\ + U_{cm} \{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f'(k) + n\}]$$

$$(22-c) \quad \frac{dm}{da} = \frac{-1}{\text{Det } M} U_{cc} \lambda \{f''(k) + \pi_k\}$$

$$(22-d) \quad \frac{dm}{d\lambda} = \frac{1}{\text{Det } M} [U_{cc} \{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f'(k) + n\} \\ + U_{mc}]$$

$$(22-e) \quad \frac{dk}{da} = \frac{-1}{\text{Det } M} [U_{cc} \{U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m)\} - U_{cm}^2] \\ = 1 - \frac{dm}{da}$$

$$(22-f) \quad \frac{dk}{d\lambda} = \frac{1}{\text{Det } M} [(U_{mc} - U_{cc}) \{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m \\ - f'(k) + n\} - U_{mc} + U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m)] \\ = \frac{1}{\text{Det } M} [U_{mc} \{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f'(k) + n\} \\ + U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m)] - \frac{dm}{d\lambda}$$

ここで、富の増加以上に実物資本は、増加しないため、 $1 > dk/da > 0$ 、 $1 > dm/da > 0$ となり、 $f''(k) + \pi_k < 0$ となる。

従って、 c 、 m 、 k の derived demand functions は、

$$(23-a) \quad c = c(a, \lambda); c_a > 0, c_\lambda < 0.$$

$$(23-b) \quad m = m(a, \lambda); 0 < m_a < 1, m_\lambda < 0.$$

$$(23-c) \quad k = k(a, \lambda); 0 < k_a < 1, k_\lambda > 0.$$

と表することができる。

次に、動学的分析を行う。 $\dot{a} = 0$ 、 $\dot{\lambda} = 0$ のとき、(同時に $\dot{c} = 0$ 、 $\dot{m} = 0$ 、 $\dot{k} = 0$ が成立する。) これを定常状態と呼ぶ。この時の均衡点 (a^*, λ^*) (ま

たは (c^*, m^*, k^*) を最適均衡点と呼ぶことにする。さらに、この最適均衡点に至る経路を最適均衡経路と呼ぶことにする。

まず、一階の条件から ((17-a) ~ (17-d) より) この最適均衡点上では、

$$(24) \quad \rho = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{U_m(c^*, m^*)}{U_c(c^*, m^*)} - \pi_m(k^* - m^*; \theta) m^* + \{\theta - \pi(k^*, m^*; \theta) - n\} \\ = f'(k^*) - n - \pi_k(k^*, m^*; \theta) m^*$$

が成立する。

次に、 (a, λ) 平面で最適均衡点 (a^*, λ^*) が達成された時の均衡点の近傍における安定性について分析する。一階の条件を考慮すると、(17-d) と (14-b) から $\dot{\lambda}/\lambda$ と \dot{a} の動学方程式体系は、

$$(25-a) \quad \dot{\lambda}/\lambda = \rho - \{f'(k(a, \lambda)) - n - \pi_k(k(a, \lambda), m(a, \lambda); \theta) m(a, \lambda)\}$$

$$(25-b) \quad \dot{a} = f(k(a, \lambda)) - nk(a, \lambda) - c(a, \lambda) \\ + \{\theta - \pi(k(a, \lambda), m(a, \lambda); \theta) - n\} m(a, \lambda)$$

となる。(25)を (a^*, λ^*) の近傍で線形近似したものを行列で表すと、

$$(26) \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}/\lambda \\ \dot{a} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \lambda - \lambda^* \\ a - a^* \end{bmatrix} \\ N = \begin{bmatrix} -f''(k)k_\lambda + \pi_k m_\lambda \\ \{f'(k) - n - \pi_k m\}k_\lambda - \pi_m m m_\lambda - c_\lambda \\ -f''(k)k_a + \pi_k m_a \\ \{f'(k) - n - \pi_k m\}k_a - \pi_m m m_a - c_a \end{bmatrix}$$

となる (計算(26))。

一階、二階の条件と Transversality Condition から、最適均衡点は Saddle Point となる (Sidrauski (1965))。従って、 $\text{Det } N < 0$ となる。

θ の上昇ともなって(a^* , λ^*)が受ける影響を分析する。 $\dot{\lambda}/\lambda = 0$, $\dot{a} = 0$ として,

(25) a^* , λ^* , θ^* で全微分し, $da^*/d\theta$, $d\lambda^*/d\theta$ を求める。

$$(27-a) \quad N^* \begin{bmatrix} d\lambda^*/d\theta \\ da^*/d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(1-\pi_\theta^*)m^* \end{bmatrix}$$

$$(27-b) \quad \frac{d\lambda^*}{d\theta} = \frac{1}{\text{Det } N^*} (1-\pi_\theta^*)m^* \{ \pi_k^* m_a^* - f''(k^*)k_a^* \}$$

$$(27-c) \quad \frac{da^*}{d\theta} = \frac{-1}{\text{Det } N^*} (1-\pi_\theta^*)m^* \{ \pi_k^* m_\lambda^* - f''(k^*)k_\lambda^* \}$$

ここで添字の*印は、最適均衡点上で達成された a^* , λ^* , c^* , m^* , k^* , の変数を構成要素としていることを示している。(計算(27))。

次に θ の上昇が最適均衡点(c^* , m^* , k^*)にどのような影響を与えるかを分析する(25-b)より、最適均衡点では、 $\dot{a} = 0$ であるから、

$$(27-a)' \quad c^* = f(k^*) - nk^* + \{ \theta - \pi(k^*, m^*; \theta) - n \} m^*$$

$$(27-b)' \quad \frac{dc^*}{dk^*_{(a=0)}} = f'(k^*) - n - \pi_k(k^*, m^*; \theta) m^*$$

$$(27-c)' \quad \frac{dc^*}{dm^*_{(a=0)}} = -\pi_m(k^*, m^*; \theta) m^*$$

$$(27-d)' \quad \frac{dc^*}{d\theta_{(a=0)}} = 1 - \pi_\theta(k^*, m^*; \theta) m^*$$

$$(27-e)' \quad dc^{*2}/d^2 k^* = f''(k^*) < 0$$

$$(27-f)' \quad dc^{*2}/d^2 m^* = 0$$

が成立する。(27)'の結果を用いて(c^* , m^* ; θ)を図の上で示せば、 $1 - \pi_\theta > 0$ のとき(図-1)、 $1 - \pi_\theta < 0$ のとき(図-2)となる。これより、 $1 - \pi_\theta > 0$ (< 0)のケースでは、 θ の上昇にもなって少なくとも c^* , k^* は増加(減少)する。しかし、 m^* はどうなるか判別できない。そこで、 $\dot{a} = 0$, のとき、 $\dot{m} = 0$, $\dot{k} = 0$ となるようなケースに於て、政府の移転支払いが各目貨幣成長率に等しい場合にかぎって以下分析を進める。(see Calvo (1979))。

まず (17-a) を t で微分し \dot{c} の方程式を求める。

$$(28-a) \quad \dot{c} = \frac{\lambda}{U_{cc}} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \frac{U_{cm}}{U_{cc}} \dot{m}$$

さらに、このシステムでは、政府のみが貨幣を発行できる唯一の経済主体であるので、 m の値は $m_0 > 0$ の時点で決定されてしまう。いま、政府の移転支払いが貨幣の名目成長率に等しいので、実質現金残高の増分 \dot{m} は定義式 $m = M/PL$ を t で微分することによって求められる。

$$(28-b) \quad \dot{m} = \left(\theta - \frac{\dot{p}}{p} - n \right) m$$

また、(8)(9)(28-b) を利用して、実質資本の増分 \dot{k} は

$$(28-c) \quad \begin{aligned} \dot{k} &= \dot{a} - \dot{m} \\ &= f(k) - nk - c \end{aligned}$$

となる。

さて、このモデルでは、 θ の上昇によって a^* が変化するが、このとき外生的環境の変化に応じて、個人が m と k のポートフォリオバランスを調整するケースと、しないケースの両方を考慮しなければならない。そこで、最適均衡点に到達するための一階、二階の条件をあわせて考えると、次の二つのケースに分けることができる。

(A) θ の上昇にともなって、個人の m の増加分を k に変換し、これを消費の増加に振り向ける場合、個人は自己のポートフォリオバランスを調整し、全体の実質現金残高の増分が変化しないように主体的均衡行動を行うケース。

(B) θ の上昇にともなって個人はポートフォリオバランス調整を行わず、全体の実質現金残高の増分が変化するケース。

従って、一階の条件 (17-a) ~ (17-c) を満たした (c, m, k) の動学方程式体系は

(A)

$$(29-a) \quad \dot{c} = \frac{U_c}{U_{cc}} \left[\rho - \frac{U_m}{U_c} - \{ \theta - \pi(k, m; \theta) - \pi_m m \} \right] \\ - \frac{U_{cm}}{U_{cc}} \left\{ f'(k) - n - (\pi_k - \pi_m) m - \frac{U_m}{U_c} \right\} m$$

$$(29-b) \quad \dot{m} = \left\{ f'(k) - n - (\pi_k - \pi_m) m - \frac{U_m}{U_c} \right\} m$$

$$(29-c) \quad \dot{k} = f(k) - nk - c$$

(B)

$$(29-a)' \quad \dot{c} = \frac{U_c}{U_{cc}} \left[\rho - \{ f'(k) - n - \pi_k m \} \right] \\ - \frac{U_{cm}}{U_{cc}} \{ \theta - \pi(k, m; \theta) - n \} m$$

$$(29-b)' \quad \dot{m} = \{ \theta - \pi(k, m; \theta) - n \} m$$

$$(29-c)' \quad \dot{k} = f(k) - nk - c$$

となる。

定常状態が達成され ($\dot{c} = 0$, $\dot{m} = 0$, $\dot{k} = 0$), その時最適均衡点 (c^* , m^* , k^*) が存在するものとする。この最適均衡点の局所的安定性を調べるために, (29)を (c^* , m^* , k^*) の近傍で線形近似し, これを行列の形で表すと以下のようになる。

$$(30) \quad \begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{m} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} c - c^* \\ m - m^* \\ k - k^* \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{U_{cc}} A(U_c - mU_{cm}) & -\frac{U_c}{U_{cc}}(B - 2\pi_m) + \frac{U_{cm}}{U_{cc}}\{(\pi_k + \pi_m) + B\}m \\ -Am & -\{(\pi_k - \pi_m) + B\}m \\ -1 & 0 \\ & \frac{U_c}{U_{cc}}\pi_k - \frac{U_{cm}}{U_{cc}}\pi_k - \frac{U_{cm}}{U_{cc}}f''(k)m \\ & f''(k) \\ & f'(k) - n \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{U_{cm}}{U_c} \left(1 - \frac{U_{cc}}{U_{cm}} \cdot \frac{U_m}{U_c} \right)$$

$$B = \frac{U_{cm}}{U_c} \left(\frac{U_{mm}}{U_{cm}} - \frac{U_m}{U_c} \right)$$

(B)

$$(30)' \quad \begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{m} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = M' \begin{bmatrix} c - c^* \\ m - m^* \\ k - k^* \end{bmatrix}$$

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{U_c}{U_{cc}}\pi_k + \frac{U_{cm}}{U_{cc}}\pi_m m & -\frac{U_c}{U_{cc}}f''(k) + \frac{U_{cm}}{U_{cc}}\pi_k m \\ 0 & -\pi_k m & -\pi_m m \\ -1 & 0 & f'(k) - n \end{bmatrix}$$

また $\text{Det } M$, $\text{Det } M'$ は,

$$(31) \quad \text{Det } M = \frac{U_c}{U_{cc}} A \{ f'(k) - n \} m (\pi_k + \pi_m) + f''(k) m \frac{U_c}{U_{cc}} (B - 2\pi_m) \\ - \{ (\pi_k - \pi_m) + B \} m \frac{U_c}{U_{cc}} \pi_k$$

$$(31)' \quad \text{Det } M' = \frac{U_c}{U_{cc}} m \{ \pi_k^2 + f''(k) \pi_m \} < 0$$

となる (計算(31))。

もし、最適均衡点 (c^*, m^*, k^*) が達成されるとすれば、名目貨幣成長率 θ の上昇によって (c^*, m^*, k^*) がどのような影響を受けるかを分析する。

$\dot{c}=0$, $\dot{m}=0$, $\dot{k}=0$ とした(30)の各式を c^* , m^* , k^* , θ で全微分したものを行列で表現すると,

(A)

$$(32) \begin{bmatrix} -\frac{U_c^*}{U_{cc}^*} A^* (U_c^* - m^* U_{cm}^*) - \frac{U_c^*}{U_{cc}^*} (B^* - 2\pi^*) + \frac{U_{cm}^*}{U_{cc}^*} \{(\pi_k^* - \pi_m^*) + B^*\} m^* \\ -A^* m^* & -\{(\pi_k^* - \pi_m^*) + B^*\} m^* \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{U_c^*}{U_{cc}^*} \pi^* - \frac{U_{cm}^*}{U_{cc}^*} f''(k^*) m^* \\ f''(k^*) m^* \\ f'(k^*) - n \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} dc^*/d\theta \\ dm^*/d\theta \\ dk^*/d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_c^*}{U_{cc}^*} (1 - \pi_\theta^*) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(B)

$$(32)' \quad M' \begin{bmatrix} dc^*/d\theta \\ dm^*/d\theta \\ dk^*/d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_{cm}^*}{U_{cc}^*} (1 - \pi_\theta^*) m^* \\ -(1 - \pi_\theta^*) m^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。よって、 $dc^*/d\theta$, $dm^*/d\theta$, $dk^*/d\theta$ は、それぞれ、

(A)

$$(33-a) \quad \frac{dc^*}{d\theta} = \frac{1}{\text{Det } M^*} \left[-\frac{U_c^*}{U_{cc}^*} (1 - \pi_\theta^*) \{(\pi_k^* - \pi_m^*) + B^*\} m^* \{f'(k^*) - n\} \right]$$

$$(33-b) \quad \frac{dm^*}{d\theta} = \frac{1}{\text{Det } M^*} \left[-\frac{U_c^*}{U_{cc}^*} (1 - \pi_\theta^*) m^* \{A^* (f'(k^*) - n - f''(k^*))\} \right]$$

$$(33-c) \quad \frac{dk^*}{d\theta} = \frac{1}{\text{Det } M^*} \left[-\frac{U_c^*}{U_{cc}^*} (1 - \pi_\theta^*) \{(\pi_k^* - \pi_m^*) + B^*\} m^* \right]$$

(B)

$$(33-a)' \quad \frac{dc^*}{d\theta} = \frac{1}{\text{Det } M'^*} (1 - \pi_\theta^*) m^* \frac{U_c^*}{U_{cc}^*} \pi_k^* \{f'(k^*) - n\}$$

$$(33-b)' \quad \frac{dm^*}{d\theta} = \frac{1}{\text{Det } M'^*} (1 - \pi_\theta^*) m^* \frac{U_c^*}{U_{cc}^*} f''(k^*)$$

$$(33-c)' \quad \frac{dk^*}{d\theta} = \frac{1}{\text{Det } M'^*} (1 - \pi_\theta^*) m^* \frac{U_c^*}{U_{cc}^*} \pi_k^*$$

となる。(計算(33))。

<1> $1 - \pi_\theta^* > 0$ のケース, (27)より,

$$(34) \quad d\lambda^*/d\theta < 0, \quad da^*/d\theta > 0$$

となる。これは θ の上昇によって λ^* が減少する。すなわち, $U_c(c^*, m^*)$ が減少することになる。従って c^* は上昇する。また, a^* は, 上昇する。これは k^* か m^* のいずれか一方もしくは両方を増加させることを示している。

(A)

今 (a^*, λ^*) で Saddle Point である。よって, (c^*, m^*, k^*) においても Saddle Point であると考えられる。そこで, 負の特性根が二つ存在する場合は $\text{Det } M > 0$ である。この時,

(33)から, $dc^*/d\theta < 0, dm^*/d\theta < 0, dk^*/d\theta < 0$ となる。これは(34)の結果と矛盾する。負の特性根が一つの場合には $\text{Det } M < 0$ となる。この時,

$$(35) \quad dc^*/d\theta > 0, \quad dm^*/d\theta > 0, \quad dk^*/d\theta > 0$$

となる。

(B)

(31)'より, $\text{Det } M' < 0$ である。よって,

$$(35)' \quad dc^*/d\theta > 0, \quad dm^*/d\theta > 0, \quad dk^*/d\theta > 0$$

となる。

(35), (35)'は(34)の結果と一致する。

これを図に示すと (図-3) のようになる。図のうえで E_0 点と E_1 点を考慮すると、

$$\rho + \pi_k^* m^* > \rho + \pi_k^{**} m^{**} \quad ; \quad \pi_k^* > 0, \quad \pi_k^{**} > 0.$$

でなければならない。従って、少なくとも $m^* > m^{**}$ でなければならない。よって、 θ の上昇にともなって m^* は減少せねばならない。すなわち、この条件下では移転支払いの増加 (= 名目貨幣供給率の増加) は、貨幣がギッフェン財であってかつ (B) の状態でなければならない。その結果、(35)' が成立する。

また、 $\pi_k > 0$ という今まで用いてきた仮定を外して、(34) が成立する範囲で $\pi_k < 0$ となるならば、(A) の状態で(35)が成立する。

(34)(35)(35)'から、 θ の上昇によって λ^* の減少、 U_c^* の減少、 c^* の増加、 a^* の上昇、(A) m^* 、 k^* の増加、(B) m^* の減少、 k^* の増加が得られることになる。

<2> $1 - \pi_\theta^* < 0$ のケース (図-2) (図-4)

(27)と(33)より、

$$(36) \quad d\lambda^*/d\theta > 0, \quad da^*/d\theta < 0$$

(A)

(37) $dc^*/d\theta < 0, dm^*/d\theta < 0, dk^*/d\theta < 0$ となる。従って、 θ の上昇によって、 λ^* の上昇、 U_c^* の増加、 c^* の減少、 a^* の減少、 m^* 、 k^* の減少が得られる。

(B)

(37)' $dc^*/d\theta < 0, dm^*/d\theta > 0, dk^*/d\theta < 0$ となり、 m^* の増加、 c^* 、 k^* の減少となる。

<3> $1 - \pi_\theta^* = 0$ のケース (図-5)

これは π がパラメーターである時の Sidrauski ケースと一致する。すなわ

ち、 π がパラメーターであれば $m^* = 0$ のとき $\pi^* = \theta - n$ となる。従って、 $\pi_\theta^* = 1$ となる。

(27)(33)(33)' より

$$(38) \quad d\lambda^*/d\theta = 0, \quad da^*/d\theta = 0$$

$$(39) \quad dc^*/d\theta = 0, \quad da^*/d\theta = 0, \quad dk^*/d\theta = 0$$

が得られる。ここでは、貨幣は「中立的」となる。また、この時、 $\pi_k = 0$, $\pi_m = 0$ となるので(24)は

$$(40) \quad \rho = \frac{U_c(c^*, m^*)}{U_c(c^*, m^*)} = f'(k^*) - n$$

となる。

III 結 論

以上の分析から導出結果を以下の表にまとめることができる (図 1, 2, 3, 4 参照)。

	$1 - \pi_\theta^* > 0$		$1 - \pi_\theta^* < 0$		$1 - \pi_\theta^* = 0$
ρ	$= \frac{U_m(c^*, m^*)}{U_c(c^*, m^*)} - \pi_m(k^*, m^*; \theta)m^*$ $= f'(k^*) - n - \pi_k(k^*, m^*; \theta)m^*,$ $\pi(k^*, m^*; \theta) = \theta - n$				$= \frac{U_m(c^*, m^*)}{U_c(c^*, m^*)}$ $= f'(k^*) - n$
$d\lambda^*/d\theta$	-		+		0
$da^*/d\theta$	+		-		0
$dc^*/d\theta$	(A)+	(B)+	(A)-	(B)-	0
$dm^*/d\theta$	+	-	-	+	0
$dk^*/d\theta$	+	+	-	-	0
貨幣は	「非中立」				「中立」

(A) $\pi_k < 0$, (B) 実質現金残高はギッフェン財, $\pi_k > 0$.

[1] 経済が定常状態にある時, 価格情報が家計の最適化行動を通して経済に及ぼす大きさだけ, Sidrauski (1967) の結果と異なる。(24)と(40)。

[2] 定常状態における貨幣供給率 θ の増加は, それにともなう家計のインフレ期待が異なる ($1 - \pi_\theta^* > 0$) かぎり, 実物経済に影響を与える。すなわち, 貨幣は「非中立的」となる(34)(35)(35)', (36)(37)(37)'。

[3] 定常状態における θ の増加と, それにともなう家計のインフレ期待が同じ ($1 - \pi_\theta^* = 0$) とき, 貨幣は「中立的」となる(38), (39)。Sidrauski (1967) の結果と一致する。

[4] Tobin (1965) や Hadjimichalkis (1971) etc. といった, Sollow タイプの成長モデルを基礎とした貨幣成長モデルにおいて導出された貨幣の「非中立性」の結論と比較すれば,

(A) のときは, 全く異なる。

すなわち, Tobin, Hadjimichalakis, etc. では,

$$\text{sign}(dm^*/d\theta) = -\text{sign}(dk^*/d\theta)$$

であり, θ の上昇効果は, 貨幣と実物資本とでは, 全く逆の効果を持っていた。

これに対して, 個人の主体的活動を重視するこのモデルでは,

$$\text{sign}(dm^*/d\theta) = \text{sign}(dk^*/d\theta)$$

となり, θ の上昇による貨幣と実物資本の効果は, 同一方向に現れることを示している。

(B) のときは,

$$1 - \pi_\theta^* > 0 : dm^*/d\theta < 0, dk^*/d\theta > 0$$

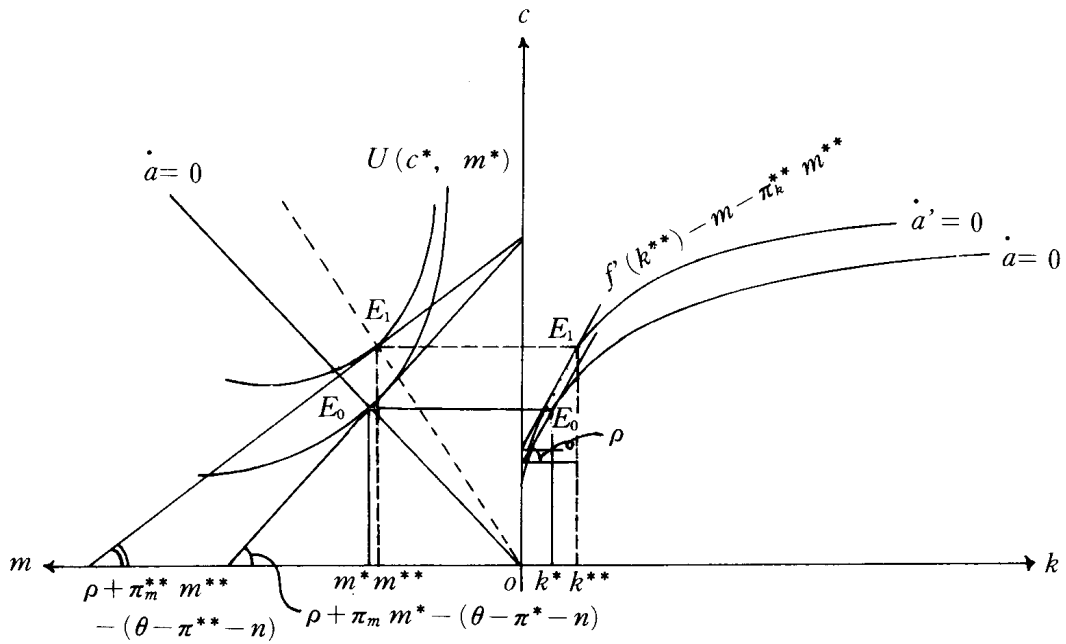
となり, Tobin (1965), Nagatani (1970) の結論と一致する。

$$1 - \pi_\theta^* < 0 : dm^*/d\theta > 0, dk^*/d\theta < 0$$

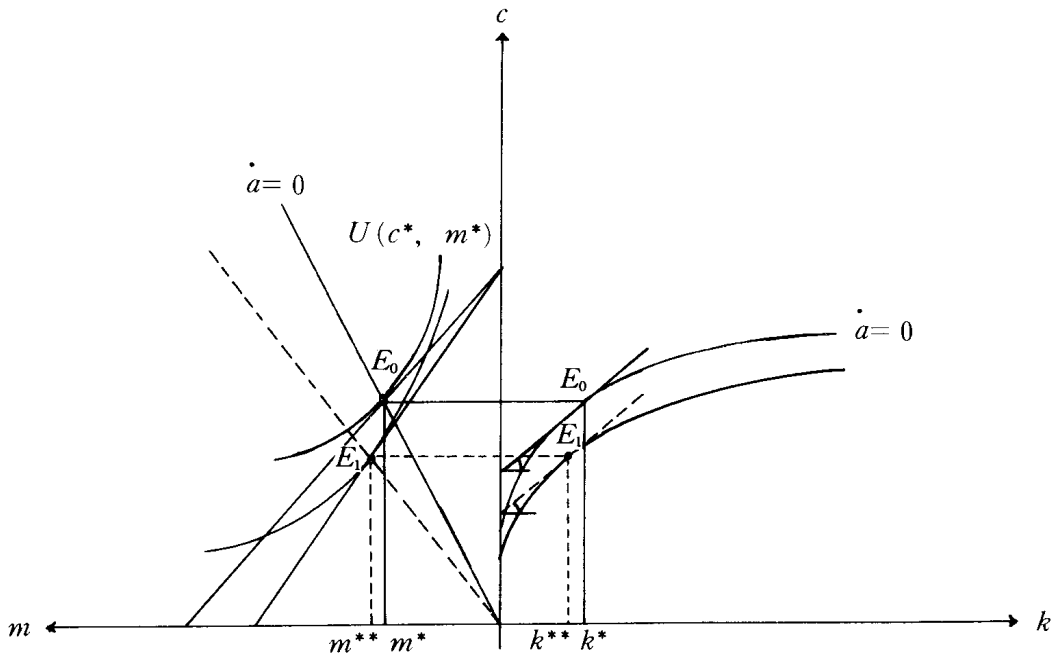
となり, Hadjimichalakis (1971) の結論と一致する。

[5] $U_{cm} = 0$ のケースでも結果は同じである。

(図-1-a) $1 - \pi_\theta > 0$

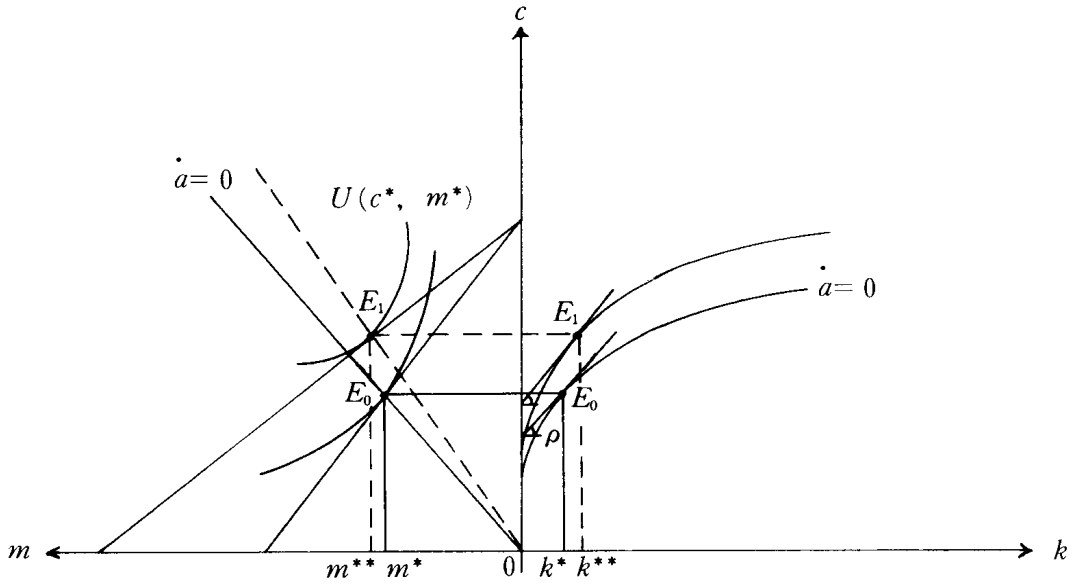


(図-2-a) $1 - \pi_\theta < 0$

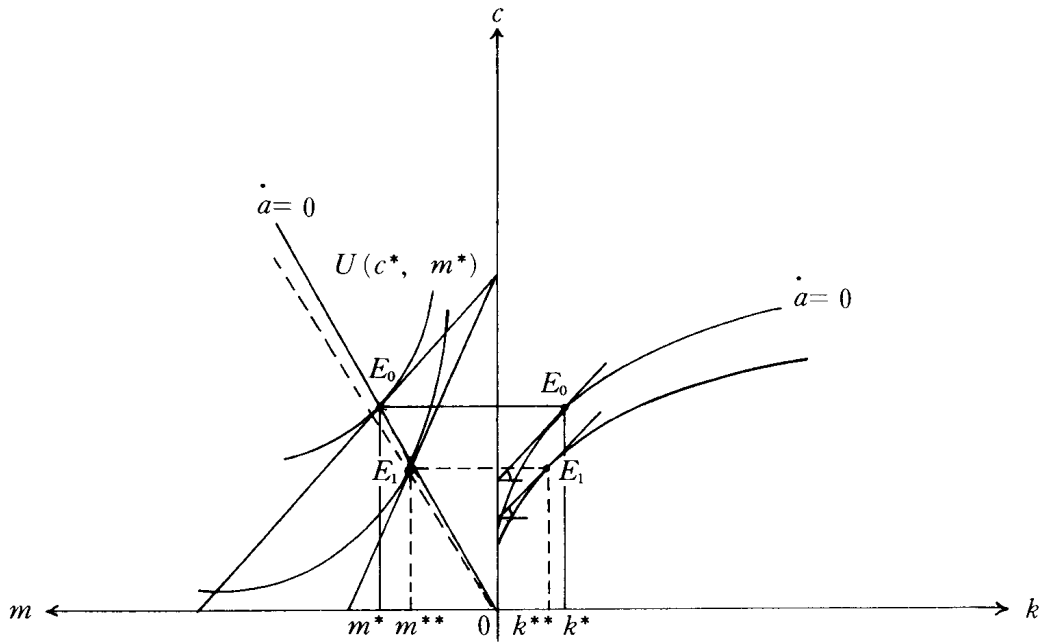


$\theta \uparrow$ のとき、 $1 - \pi_\theta > 0 : dm^*/d\theta < 0$; $1 - \pi_\theta < 0 : dm^*/d\theta > 0$ のときの図である。同一条件下において、 $1 - \pi_\theta > 0 : dm^*/d\theta > 0$; $1 - \pi_\theta < 0 : dm^*/d\theta < 0$ のときの図も示すことができる。

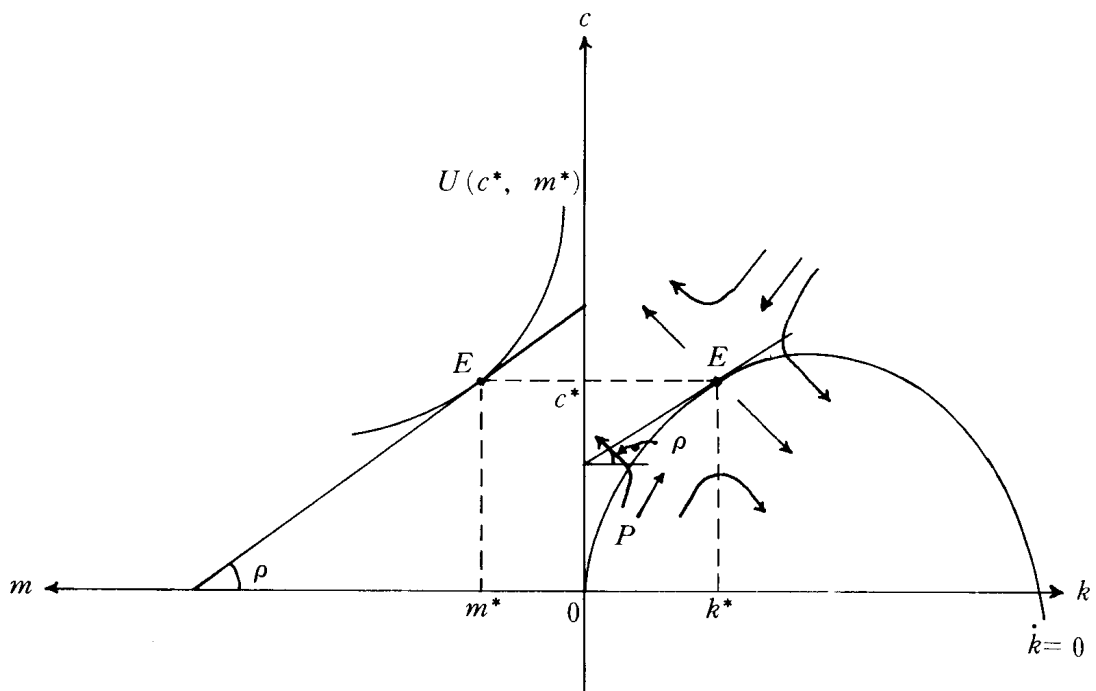
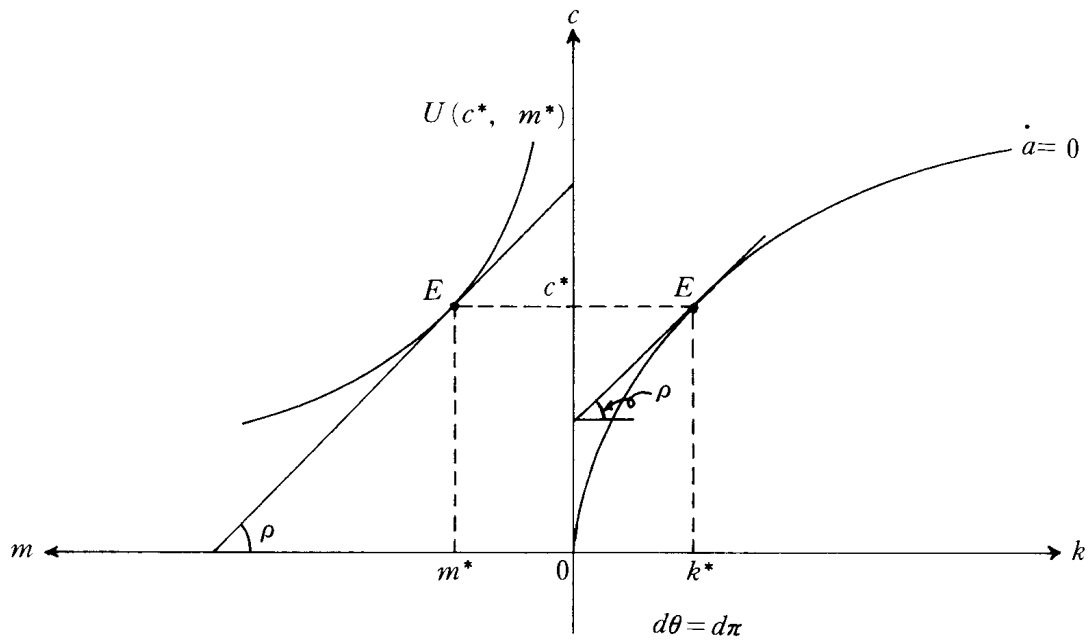
(図-1-b) $1 - \pi_{\theta}^* > 0$



(図-2-b) $1 - \pi_{\theta}^* < 0$



(図-5) $1 - \pi_{\theta}^* = 0$



注) Brock (1974) は Sidrauski (1967) モデルを $U_{cm} > 0$, $U_{cm} < 0$, $U_{cm} = 0$ の全てのケースについて検討した。Calvo (1979) は, $U_{cm} > 0$ のときがこのモデルの最適均衡を達成するための安定条件となっていることを示した。ここでは Sidrauski モデルに準拠するため, とりあえず $U_{cm} > 0$ とした。 $U_{cm} = 0$ の場合でも結論は変わらない。

参考文献

- Arrow, K. J. and M. Kurz, *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, 1970, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, chap. II and IV.
- Brock, W. "Money and growth: the Case of Long Run Perfect Foresight," *International Economic Review*, V. 15 (Oct., 1974) 750–7.
- Calvo, G. A., "On Models of Money and Perfect Foresight," *International Economic Review*, V. 20 (Feb., 1979) 83–103.
- Dornbush, R. and J. A. Frenkel, "Deflation and Growth: Alternative Approaches," *Journal of Money, Credit and Banking*, V. 5 (Frb., 1973) 141–56.
- Hadjimichalakis, M. "Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money the Tobin Models," *Review of Economic Studies*, V. 38 (Oct., 1971) 457–79.
- Hodels," *Journal of Monetary Economics*, (Forcoming).
- ……, "Rational Expectations, Price Dynamics, and Nonneutrality of Money under Intertemporal Optimization," (University of Georgia), *Working Paper Series*. 1986.
- Nagatani, K. "A Note on Professor Tobin's 'Money and Economic Growth'," *Econometrica*, V. 83 (Jan., 1970) 171–75.
- Sidrauski, M. "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy," *American Economic Review : Paper and Proceeding*, V. 57 (Oct., 1967) 534–44.
- Tobin, J. "Money and Economic Growth," *Econometrica*, V. 33 (Oct., 1965) 671–84.

(計算22-1)

$$(22-a) \frac{dc}{da} = \frac{1}{Det N} \begin{bmatrix} 0 & U_{cm} & 0 \\ 0 & U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m) & -\lambda(f'' + \pi_k) \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{Det M} U_{cm} \lambda(f'' + \pi_k) > 0$$

$$(22-b) \frac{dc}{d\lambda} = \frac{1}{Det M} \begin{bmatrix} 1 \\ -\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f' + n\} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{cm} & 0 \\ U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m) & -\lambda(f'' + \pi_k) \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{Det M} [-\{U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m)\} - \lambda(f'' + \pi_k) - \{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f' + n\} U_{cm}]$$

$$= \frac{1}{Det M} [-\{U_{mm} + 2\lambda(\pi_k - \pi_m) + \lambda f''\} - U_{cm}\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f' + n\}] < 0$$

$$(22-c) \frac{dm}{da} = \frac{1}{Det M} \begin{bmatrix} U_{cc} & 0 & 0 \\ U_{mc} & 0 & -\lambda(f'' + \pi_k) \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{det M} U_{cc} \lambda(f'' + \pi_k) > 0$$

$$(22-d) \frac{dm}{d\lambda} = \frac{1}{Det M} \begin{bmatrix} U_{cc} & 1 \\ U_{mc} & -\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f' + n\} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda(f'' + \pi_k) \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{Det M} [U_{cc}\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f' + n\} + U_{mc}] < 0$$

$$\begin{aligned}
(22-e) \quad \frac{dk}{da} &= \frac{1}{\text{Det}M} \begin{bmatrix} U_{cc} & U_{cm} & 0 \\ U_{mc} & U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m) & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\text{Det}M} [-U_{cc}\{U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m)\} + U_{cm}^2] > 0
\end{aligned}$$

(計算22-2)

$$\begin{aligned}
\frac{dk}{d\lambda} &= \frac{1}{\text{Det}M} \begin{bmatrix} U_{cc} & U_{cm} & & & \\ U_{mc} & U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m) & & & \\ -1 & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f' + n\} & & \\ & & 0 & & \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\text{Det}M} [-U_{mc} + U_{mc}\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f' + n\} \\
&\quad + U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m) - U_{cc}\{(\theta - \pi - n) \\
&\quad + (\pi_k - \pi_m)m - f' + n\}] \\
&= \frac{1}{\text{Det}M} [(U_{mc} - U_{cc})\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f' + n\} \\
&\quad - U_{mm} + \lambda(\pi_k - 2\pi_m)] > 0
\end{aligned}$$

(計算(27))

$$\begin{aligned}
(27-b) \quad \frac{d\lambda^*}{d\theta} &= \frac{1}{\text{Det}M} \begin{bmatrix} 0 & -f''k_a + \pi_k m_a \\ -(1 - \pi_\theta)m & (f' - n - \pi_k m)k_a - \pi_m m m_a - c_a \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\text{Det}M} (1 - \pi_\theta)m(\pi_k m_a - f''k_a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(27-c) \quad \frac{da^*}{d\theta} &= \frac{1}{\text{Det}M} \begin{bmatrix} -f''k_\lambda + \pi_k m_\lambda & 0 \\ (f' - n - \pi_k m)k_\lambda - \pi_m m m_\lambda - c_\lambda & -(1 - \pi_\theta)m \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\text{Det}M} (1 - \pi_\theta)m(\pi_k m_\lambda - f''k_\lambda)
\end{aligned}$$

(計算(31))

Dynamic Equations

$$\begin{aligned}
\dot{c} &= \frac{U_c}{U_{cc}} \left\{ \rho - \frac{U_m}{U_c} - (\theta - \pi - n - \pi_m m) \right\} \\
&\quad - \frac{U_{cm}}{U_{cc}} \left\{ f' - n - (\pi_k - \pi_m) m - \frac{U_m}{U_c} \right\} m \\
(29) \quad \dot{m} &= \left\{ f' - n - (\pi_k - \pi_m) m - \frac{U_m}{U_c} \right\} m \\
\dot{k} &= f(k) - n - c \\
M &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{U_{cc}} A (U_c - m U_{cm}) \\ -A_m \\ -1 \\ -\frac{U_c}{U_{cc}} (B - 2\pi_m) + \frac{U_{cm}}{U_{cc}} \{ (\pi_k - \pi_m) + B \} m \frac{U_c}{U_{cc}} \pi_k - \frac{U_{cm}}{U_{cc}} f''(k) m \\ -\{ (\pi_k - \pi_m) + B \} m & f''(k) m \\ 0 & f'(k) - n \end{bmatrix} \\
A &= \frac{U_{cm}}{U_c} \left(1 - \frac{U_{cc}}{U_{cm}} \cdot \frac{U_m}{U_c} \right), \quad B = \frac{U_{cm}}{U_c} \left(\frac{U_{mm}}{U_{cm}} - \frac{U_m}{U_c} \right) \\
(31) \quad \text{Det } M &= \frac{A}{U_{cc}} (U_c - m U_{cm}) \{ (\pi_k - \pi_m) + B \} m (f' - n) \\
&\quad - \left[\frac{U_c}{U_{cc}} (B - 2\pi_m) + \frac{U_{cm}}{U_{cc}} \{ (\pi_k - \pi_m) + B \} m \right] f''(k) m \\
&\quad - \{ (\pi_k - \pi_m) + B \} m \left\{ \frac{U_c}{U_{cc}} \pi_k - \frac{U_{cm}}{U_{cc}} f''(k) m \right\} \\
&\quad + A \left[-\frac{U_c}{U_{cc}} (B - 2\pi_m) + \frac{U_{cm}}{U_{cc}} \{ (\pi_k - \pi_m) + B \} m \right] \{ f'(k) - n \} \\
&= \frac{U_c}{U_{cc}} A \{ (\pi_k - \pi_m) + B \} m (f' - n) - \frac{U_c}{U_{cc}} (B - 2\pi_m) f'' m \\
&\quad - \{ (\pi_k - \pi_m) + B \} m \frac{U_c}{U_{cc}} \pi_k - A_m \frac{U_c}{U_{cc}} (B - 2\pi_m) (f' - n) \\
&= \frac{U_c}{U_{cc}} A (\pi_k + \pi_m) m (f' - n) - \frac{U_c}{U_{cc}} (B - 2\pi_m) f'' m \\
&\quad - \{ (\pi_k - \pi_m) + B \} m \frac{U_c}{U_{cc}} \pi_k
\end{aligned}$$

(計算(33))ここで*は省略しました。

$$\begin{aligned}
\frac{dc^*}{d\theta} &= \frac{1}{\text{Det}M} \begin{bmatrix} \frac{U_c}{U_{cc}} (1-\pi) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{U_c}{U_{cc}} (B-2\pi_m) + \frac{U_{cm}}{U_{cc}} \{(\pi_k - \pi_m) + B\} m & \frac{U_c}{U_{cc}} \pi_k - \frac{U_{cm}}{U_{cc}} f''(k) m \\ -\{(\pi_k - \pi_m) + B\} m & f''(k) m \\ 0 & f'(k) - n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\text{Det}M} \left[-\frac{U_c}{U_{cc}} (1-\pi_\theta) \{(\pi_k - \pi_m) + B\} m (f' - n) \right] \\
\frac{dm^*}{d\theta} &= \frac{1}{\text{Det}M} \begin{bmatrix} -\frac{1}{U_{cc}} A(U_c - m U_{cm}) & \frac{U_c}{U_{cc}} (1-\pi_\theta) \\ -A_m & 0 \\ -1 & 0 \\ & \frac{U_c}{U_{cc}} \pi_k - \frac{U_{cm}}{U_{cc}} f''(k) m \\ & f''(k) m \\ & f'(k) - n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\text{Det}M} \left[-\frac{U_c}{U_{cc}} (1-\pi_\theta) f''(k) m + A_m \frac{U_c}{U_{cc}} (1-\pi_\theta) (f' - n) \right] \\
&= \frac{1}{\text{Det}M} \left[-\frac{U_c}{U_{cc}} (1-\pi_\theta) m \{A(f' - n) - f''(k)\} \right] \\
\frac{dk^*}{d\theta} &= \frac{1}{\text{Det}M} \begin{bmatrix} -\frac{1}{U_{cc}} A(U_c - m U_{cm}) \\ -A_m \\ -1 \\ \frac{U_c}{U_{cc}} (B-2\pi_m) + \frac{U_{cm}}{U_{cc}} \{(\pi_k - \pi_m) + B\} m & \frac{U_c}{U_{cc}} (1-\pi_\theta) \\ \{(\pi_k - \pi_m) + B\} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\text{Det}M} \left[-\{(\pi_k - \pi_m) + B\} m \frac{U_c}{U_{cc}} (1-\pi_\theta) \right]. \\
(\pi_k - \pi_m) + B &= (\pi_k - \pi_m) + \frac{U_{cm}}{U_c} \left(\frac{U_{mm}}{U_{cm}} - \frac{U_m}{U_c} \right) \\
&= (\pi_k - \pi_m) + \frac{U_{mm}}{U_c} - \frac{U_{cm}}{U_c} \frac{U_m}{U_c} < 0
\end{aligned}$$

(21-b)より、 $\lambda = U_c$ よって、

$$U_{mm} + U_c(\pi_k - \pi_m) = U_c \left\{ \frac{U_{mm}}{U_c} + (\pi_k - \pi_m) \right\} > 0$$