協力ｎ人ゲームのCore

宮　　三康

1．協力ｎ人ゲームにおいて，各プレイヤーの受け取る配分は，各プレイヤーの力関係等によって，色々異なると考えられる。しかし，各プレイヤーがゲームに協力するからには，その配分は，最底次の条件をみたしていなければならないだろう。すなわち，個々のプレイヤーにとって，ゲームに協力したときに受ける配分が独立に行動したときに受ける配分より大きいか少なくとも等しく，かつプレイヤー達がどのような結託をしても，その結託内の成員にとって，協力したときの配分より有利な再配分が，他の成員の配分を犠牲にしないかぎり，不可能なような状態でなければならないであろう。このような条件をみたしておれば，各プレイヤーは，ゲームに協力してもなんら不利になることはなく，また何人かのプレイヤーが結託して，協力ゲームをblock することもないだろう。問題は，このような条件をみたす配分が，存在することができるかどうかである。

ところで，何人かのプレイヤーからなる結託を，あたかも一人のプレイヤーのごとく考えて，そのプレイヤーの配分が，ゲームに協力したときの配分より大きくなることができないとき，いいかえれば，ゲームにおいて，どのような結託も存在しないような配分のときを，core の配分と呼べば，平衡ゲームを仮定することで，そのような配分の存在可能なことが，証明されている。

本稿は，上記の条件をみたす協力ｎ人ゲームの解と，core の配分が，如何なる関係になっているかを論ずることを，主たる目標としている。まずモデルの概観を知るために，協力３人ゲームより検討を始めよう。

2．プレイヤーの集合を $I_3=\{1,2,3\}$，各プレイヤーのもつ純粋戦略の集合を$\Pi_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$，$\Pi_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$，$\Pi_3=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\}$，各プレイヤーが純粋戦略$\alpha_h\beta_i\gamma_j$，where $\alpha_h\in\Pi_1$，$\beta_i\in\Pi_2$，$\gamma_j\in\Pi_3$，を用いたときの各プレイヤーの配分を$A\alpha_h\beta_i\gamma_j$，$B\alpha_h\beta_i\gamma_j$，$C\alpha_h\beta_i\gamma_j$，その組を$(A\alpha_h\beta_i\gamma_j, B\alpha_h\beta_i\gamma_j, C\alpha_h\beta_i\gamma_j,)\in E^3$（三次元ユークリッド空間）とする。次に，純粋戦略の組$\alpha_h\beta_i\gamma_j$ を確率 z_{hij} で用いる確率分布をつくる。すなわち

$$z=(z_{lll},\cdots,z_{hij},\cdots,z_{lmn}),\ z_{hij}\geqq 0,\ \sum_h\sum_i\sum_j z_{hij}=1$$
$$(h=1,2,\cdots,l.\ i=1,2,\cdots,m.\ j=1,2,\cdots,n)$$

これを，結合混合戦略という。この z の集合Z，すなわち，

$$Z=\{z\mid z=(z_{lll},\cdots,z_{hij},\cdots,z_{lmn}),\ z_{hij}\geqq 0,\ \sum_h\sum_i\sum_j z_{hij}=1\}$$

は，コンパクトな凸集合である。結合混合戦略の集合Zの任意の点 z を用いたときの各プレイヤーの配分の期待値は，

$$m_1(z)=\sum_h\sum_i\sum_j A_{hij}\,z_{hij},$$
$$m_2(z)=\sum_h\sum_i\sum_j B_{hij}\,z_{hij},$$
$$m_3(z)=\sum_h\sum_i\sum_j C_{hij}\,z_{hij}，となる。$$

したがって$\forall z\in Z$に対する$m_1(z)$の集合をM_1，$m_2(z)$の集合をM_2，$m_3(z)$の集合をM_3とすれば，直積$M_1\times M_2\times M_3=R''$は，プレイヤー1，2，3，の達成可能な配分の期待値の集合になる。これを利得集合という。$m_1(z)$，$m_2(z)$，$m_3(z)$は，コンパクトな集合上に定義された実数値連続関数だから，M_1，M_2，M_3は，ともにコンパクト集合であり，また，M_1，M_2，M_3は，それぞれ$l\times m\times n$個の点の凸一次結合からなる点の集合だから凸集合でもある。したがって，その直積たる$M_1\times M_2\times M_3=R''$は，コンパクト凸集合になる。

ところで，利得集合R''の相異なる任意の二点，$u=(u_1,u_2,u_3)$，$v=(v_1,v_2,v_3,)$，において，$u\geqq v$のとき，u は vを支配するという。各プレイヤーにとって，v より u の方の配分が，有利になるか，または，少なくとも等しくなるわけである。したがって，R''の点のうち，他の点によって支配されない点の集合を結合最大利得集合 $R'\subset R''$ とすれば，協力3

人ゲームにおいて，各プレイヤーに関心のある配分の組の存在するのは，R′という集合である。R′の性質を検討してみよう。

まず定義から解るように，R′は，他のプレイヤーの配分を犠牲にすることなしに，自己の配分を増すことが不可能な配分の組からなる集合という意味で，パレート最適な配分の組の集合だということができる。

次に，R′の非空性についてだが，プレイヤー1,2,3,の配分の期待値をあらわす関数$m_1(z)$, $m_2(z)$, $m_3(z)$は，コンパクト集合Zを定義域とする実数値連続関数だから，最大値が存在する。しかも，$m_1(z)$, $m_2(z)$, $m_3(z)$は，凸一次結合だから，その最大値は，それぞれの関数の係数A_{hij}, B_{hij} ,C_{hij} の内で最大の項のものと等しくなる。たとえば，A_{hij} の方の最大項をA_{qrs}，B_{hij} の方をB_{tuv}，C_{hij} の方をC_{wxy}とすれば，z_{qrs}，z_{tuv}，z_{wxy} を，それぞれ1の確率で用いる結合混合戦略 $z \in Z$ によって，

$$\max m_1(z)=A_{qrs},$$

$$\max m_2(z)=B_{tuv},$$

$$\max m_3(z)=C_{wxy},$$

を得ることができる。したがって，関数の係数がそれぞれ相異しているとすれば，この時の配分の組 $m_1'=(A_{qrs}, B_{qrs}, C_{qrs})$, $m_2'=(A_{tuv}, B_{tuv}, C_{tuv})$，$m_3'=(A_{wxy}, B_{wxy}, C_{wxy})$ は，R′の点になる。しかしながら，関数の係数に等しいものがある場合，特に，プレイヤー1,2,3,の最高の配分A_{qrs}，B_{tuv}，C_{wxy} の値とそれぞれ等しい値が他にも存在する場合で，しかも，そののときの組となる他のプレイヤー達の配分が，$z_{qrs}=1$，$z_{tuv}=1$，$z_{wxy}=1$の確率で用いた戦略のときのものより大きいものがあれば，前のm_1'，m_2'，m_3' は，もはやR′の点ではありえない。しかしその場合にも，R′の非空性は依然として成立する。実際，たとえば，プレイヤー1の配分がA_{qrs}の値に等しく，しかも，それと組になる他のプレイヤー2,3,の配分の内，z_{qrs}を確率1で用いるときのものより大きくなる組が，かならず存在し，その組を確率1で用いる結合混合戦略zが存在するからである。

以上よりR′は，各プレイヤーの配分を決める非空でパレート最適な点の集合であることが解った。しかし，最終的に各プレイヤーが，この集合の点できまる配分でゲームに協力するかどうかは，未決定である。なぜなら，たとえR′の点であっても，あるプレイヤーの配分が独立に行動して得る配分より小さいものであったり，又は，何人かのプレイヤーの結託した方が有利な配分が可能だったりすれば，そのようなプレイヤー達にとって，ゲームに協力する必要はないわけである。したがって協力をしたときの配分の組の集合は，R′の内，どのプレイヤーにとっても，独立に行動して得る配分より大きいか，少なくとも等しく，且つ，協力したときの配分より有利になるような結託の不可能な集合でなければならない。このような集合を協調利得集合Rと名づければ，協力ゲームに解が存在するかどうかは，このRが非空かどうかにかかっている。Rは，非空な集合R′の部分集合であるが，このことはなんらRの非空性の保証になりえない。かくして，Rの非空性の証明が我々の主要な関心事となるのだが，次節において，ゲームを協力n人に拡大し，coreの概念を導入して，Rの非空性との関係を検討することにしよう。

3. プレイヤーの集合を$I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，ゲームの結託を$I_n$の任意の部分集合Sによって表わす。結託Sにとっての最悪の事態は，プレイヤー$(I_n - S) = -S$が結託して対抗するときである。この場合，n人ゲームは二人ゲームになり，結託Sのゲーム値を求めることができる。すなわち，

$$V(S)=\max_{\alpha}\ \min_{\beta}\ f(\alpha,\beta)\ 。$$

但し，$f(\alpha,\beta)$は，結託Sの利得関数であり，α及びβは，S及び$-S$によって用いられる結合混合戦略である。V(S)を特性関数という。次にV(S)と戦

＊ 略上同等な，[0.1]正規化をした特性関数を次のように構成する。

$$m(S)=\frac{V(S)-\sum_{i\in s}V(\{i\})}{V(I_n)-\sum_{i\in I_n}V(\{i\})}$$

但し分母分子ともにゼロの時m(S)＝0と定義する。m(S)は，プレイヤー全員が結託したときの配分と，各プレイヤーが独立に行動したときの配分の差を分母に，プレイヤーの一部Sが結託したときと，独立に行動したときの配分の差を分子とする値いで，結託Sの有利さの程度を表わす。たとえば，m(S)＝1なら，Sという結託によって，このゲームの結託による全純利得を手に入れることを意味する。しかし，ここで注意しなければならないことは，m(S)ϵ（0.1]であるかぎり，結託Sをするのが有利なのだが,その結託の利益が，個々の成員の利益に直結しないことである。m(S) ϵ(0.1]であれば,結託Sの成員にとって，独立に行動するより有利な配分が可能であるけれど，そうなる保証はないのである。さて，I_n の部分集合 Sで，任意の結託を表わしたのだが，ゲームに参加しているプレイヤー が任意に結託しても有利になれるとはかぎらない。たとえば，I_nをJ及びI_n-J に分け，$S\subset J$と$T\subset I_n-J$とが結託しても，$V(S\cup T)=V(S)+V(T)$となるような場合，すなわち，SとTの結託の有利さが存在しない場合がある。結託Sは，Jの範囲を越えてまで結託を拡大する意味がないことになる。このようなJを，分離集合という。分離集合Jで，非空の真部分集合を自己の分離集合としてもたないとき，そのJを，最小分離集合J_iという。したがって，結託は，この集合に属するプレイヤー間においてのみ有意義なわけである。最小分離集合は，I_nの1つの分割をつくる。I_nのすべての最小分離集合をJ_i (i＝1,2,…m）とし，J_iを要素とする集合族を$\mathcal{T}'$とすると，

$$\mathcal{T}'=\{J_i \mid J_1+J_2+\cdots+J_m, J_i\neq\phi, J_i\cap J_j=\phi, i\neq j\}。$$

最小分離集合が唯一人のプレイヤーからなるとき，すなわち，$I_n-\{i\}\supset S$に対して，

$$V(S\cup\{i\})=V(S)+V(\{i\}),\ \exists i\epsilon I_n$$

が成立するとき，このｉをダミーという。このｉと，結託しても，少しも有利にならないわけである。以上より，ゲームにおけるプレイヤー達の結託は，まずダミーを除外し，次で結託の有利さが存在する最小のグループ，すなわち，最小分離集合に別れ，その各々のグループの内部で行なわれることが解る。しかし，この最小分離集合に属するプレイヤー達がどんな結託形成をするかは解らない。すなわち，$J_i \in \mathcal{T}'$において，各プレイヤーは，自己に有利な配分を受けるべく，種々なる結託を試みるであろう。したがって，最小分離集合は，また，その中で形成される結託によって分割される。すなわち，$\mathcal{T}'$は，さらに結託によって分割されるのである。そのときの結託をS_j($j=1, 2, \cdots k$) それを要素とする集合族を$\mathcal{T}$とすると，

$$\mathcal{T}=\{S_j \mid S_1+S_2+\cdots+S_k=I_n,\ S_j \neq \phi, S_i \cap S_j=\phi, i \neq j\}\ 。$$

さて，協力ｎ人ゲームにおいてプレイが完了し各プレイヤーの受けとる配分が決まったとすると，その配分をきめる集合は，さきに述べたように，相互に支配関係がなく，各プレイヤーにとって独立に行動して得る配分より大きいか少なくとも等しく，しかも協力ゲームをblock するような有利な再配分の可能な結託S_jが存在しないような場合，形式的に書けば，次の条件をみたす集合でなければならないだろう。すなわち，配分のベクトルを$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，それを要素とする集合をRとすれば，

(1) $x' \geq x$ or $x \leq x' \Rightarrow x' \notin R$

(2) $x_i \geqq V(\{i\}),\quad \forall i \in I_n,$

(3) $\sum_{i \in S_j} x_i \geqq V(S_j) \quad (j=1, 2, \cdots, k)$

(4) $\sum_{i=1}^{n} x_i = V(I_n).$

(4)は，各プレイヤーの配分の総和が，プレイヤー全員が結託したときの配分の総和と等しくなければならないことを示している。プレイヤー全員で一つの結託をつくる場合，各プレイヤーのもっ純粋戦略はすべて合成されて，結合混合戦略として表わされる。この戦略は，他の可能なあらゆる結合混合戦略を包含する関係にあり，したがって，結合混合戦略を用いて可能な最大の

ゲーム値は，$V(In)$ より大きくなりえないことになる。すなわち，$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq V(I_n)$。しかし，$\sum_{i=1}^{n} x_i < V(I_n)$ とすると，狭義不等号より，左辺の各 i に，ある正の値をプラスしてなおかつ，この式の成立が可能である。すなわち，もっと有利な配分方法が存在することになる。これは，経済における最大化行動に反するので狭義の不等号の成立するケースはありえず(4)が成立するのである。

(1)～(4)の条件をみたす配分の組の集合が，協力n人ゲームの場合の協調利得集合Rになり，そして，以前と同様この集合が非空かどうかが問題なのである。ここで我々は，最初にのべた core の概念を用いて，不完全な条件付のものだが一つの解を与えよう。すなわち core の概念を用いて協力n人ゲームの解の集合を定義すれば，次のようになる。

$$C_n = \{x \mid x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \epsilon E^n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = V(I_n),\ \text{且つ任意の結託}\ S_j \subset I_n$$

$$\text{に対して}\ \sum_{i \epsilon S_j} x_i \geqq V(S_j)\} \qquad (j=1,2,\cdots,k\ )$$

上式はRの条件の内(3)と(4)をみたす点の集合である。しかし，条件(1)は，条件(4)の根拠となっている各プレイヤーの最大化行動の仮定よりみちびき出せるので，C_nの点であれば，みたされているといえる。問題は条件(2)で，C_nの点であれば条件(3)より，どのプレイヤーにとっても結託のときより有利か少なくとも等しい配分は可能であるが，だからといって結託S_jのあるプレイヤーが，他のプレイヤーの犠牲の上にcoreの配分より有利な配分を得る可能性をふさぐものではないということである。したがってC_nはRに対して十分条件をみたしているにすぎないのである。以上の制約を念頭におきながら，C_n の性質を検討してみよう。

まずCn, はパレート最適な点の集合であることは明らかである。なぜなら仮に，他のプレイヤーの配分を犠牲にすることなく，あるプレイヤー i の配分x_iを増すことが出来るとすると，$x' \geq x$ where $x', x, \epsilon Cn$ and $x'_i > x_i$，で $\sum_{i=1}^{n} x_i > V(I_n)$ となるから，C_n の条件と矛盾することになる。

次に非空性だが，そのためには，次のような平衡ゲームという条件が必要になる。

定義：平衡ゲームを次のように定義する。

n 人ゲームの結託を$S_j (j=1,2,\cdots,k)$，その集合族を$\mathcal{J}=\{S_1, S_2,\cdots, S_k\}$とする。そして，$(e^{S_1}, e^{S_2}, \cdots, e^{S_k})\ \alpha = e^{I_n}$, where $e^{S_j}=(e_1^{S_j}, e_2^{S_j}, \cdots, e_n^{S_j})' \in E^n$

$$e_i^{S_j}=\begin{cases}1 : i \in S_j\\ 0 : i \notin S_j\end{cases}$$

をみたす非負解$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)'\geqq o$ が存在するとき$\mathcal{J}$を平衡集合族といい，この$\mathcal{J}$に対して，

$$v(I_n) \supset \bigcap_{S_j \in \mathcal{J}} (v(S_j) \times E^{I_n - S_j})$$

$$\text{where } v(S_j) = \{x^{S_j} \in E^{S_j} ; \sum_{i \in S_j} x_i \leqq V(S_j)\}$$

が成立するとき，このゲームを平衡ゲームという。

定理：協力 n 人ゲームのcore の集合C_nは，平衡ゲームであれば非空である。

証明，まず次のような線型計画問題を考える。

$$\min (e^{I_n}, x) \text{ subject to } A'x \geqq y, x \geqq o$$

$$\max (y, \alpha) \text{ subject to } A\alpha \leqq e^{I_n}, \alpha \geqq o$$

$$\text{where } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}, \ y_j = V(S_j), \quad A = \begin{bmatrix} e_1^{S_1} & e_1^{S_2} & \cdots & e^{S_k} \\ e_2^{S_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ e_n^{S_1} & \cdots & & e_n^{S_k} \end{bmatrix}$$

以上を協力 n 人ゲームに適用すれば，制約式$A'x \geqq y$は，任意の結託の配分の和が，その結託に属するプレイヤー達のcore の時の配分の和よりも大きくなれないこと，すなわち，$\sum_{i \in S_j} x_i \geqq V(S_j)\ (j=1,2,\cdots,k)$ を示し，目的関数$\sum_{i=1}^{n} e_i^{I_n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$ は，core のときの全プレイヤーの配分の和を示すと，解釈できる。したがって，この目的関数が，$\sum_{i=1}^{n} x_i = V(I_n)$ の関係をみたせば，core の非空性が証明できるわけである。

いま原問題の解を$\hat{x}$，双対問題の解を$\hat{\alpha}$とすると，平衡集合族の仮定より，

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \sum_{j=1}^{k} e_i^{S_j} \hat{\alpha}_j = \sum_{j=1}^{k} \hat{\alpha}_j \sum_{i=1}^{n} e_i^{S_j} \hat{x}_i = \sum_{j=1}^{k} \hat{\alpha}_j \sum_{i \in S_j} \hat{x}_i$$

また定義より

$$\sum_{j=1}^{k} y_j \hat{\alpha}_j = \sum_{j=1}^{k} V(S_j)\hat{\alpha}_j$$

双対定理より

$$(e^{I_n}, \hat{x}) = (y, \hat{\alpha}), \quad \text{すなわち} \quad \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = \sum_{j=1}^{k} y_j \hat{\alpha}_j, \ (y_j = V(S_j))$$

したがって,

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{\alpha}_j \sum_{i\in S_j} \hat{x}_i = \sum_{j=1}^{k} \hat{\alpha}_j V(S_j)$$

変形して

$$\sum_{j=1}^{k} \hat{\alpha}_j \left(\sum_{i\in S_j} \hat{x}_i - V(S_j)\right) = 0$$

$\alpha \geq 0$ より, $\alpha_j > 0$, $\alpha_i = 0$ $(j=1,2,\cdots,k.\ i \neq j)$となるような結託S からなる集合族も平衡集合族であるから,

$$\sum_{i\in S_j} \hat{x}_i = V(S_j) \qquad (j=1,2,\cdots,k)$$

平衡ゲームの仮定より, $\hat{x}^{S_j} \in v(S_j)$ ならば, $\hat{x} \in v(I_n)$。ゆえに

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = V(I_n)$$

ゆえに

$\hat{x} \in Cn$。　　　　証了。

参考文献

"ゲームの理論" 第8.9.10章, 鈴木光男

"競争社会のゲームの理論" 第5.6章,鈴木光男編

"現代経済学の数学的方法" 第14, 25, 41節, 二階堂副包.

"The core of an n person game" by H, E, Scarf.
Econometrica, vol.35, January, 1967

"A limit theorem on the core of an economy" By G,Debreu,
and H, E, Scarf. international economic review 4.1963.