経済と経営 *18－3* (1987. 12)

〈論　文〉

貨幣経済における金融政策とその効果*
――個人の完全先読み価格情報モデルを中心として――

飯　田　隆　雄

I　は　じ　め　に

マクロ的金融政策の長期的効果を分析するとき，実物経済に貨幣がどのように関ってくるかという問題は重要な研究課題である。

特に Sidrauski (1967) において示された最適貨幣成長モデルは，財政・金融政策を通じて行なわれる貨幣供給率の変化が，長期的に実物経済に影響を与えない，すなわち，「中立的」となるという結論を導出した (Sidrauski (1967), Calvo (1970), Dornbush and Frenkel (1973), Hayakawa (1986))。

貨幣が「中立的」となる根拠は，モデルの中で，家計にとって，期待インフレ率がパラメーターとして仮定されているということにあった。ところが，近年の研究成果によれば，この期待インフレ率が経済全体にどのような影響を及ぼし得るかということを事前的に考慮するような価格メカニズムが，家計の最適化行動の中に組み込まれている場合，すなわち，家計が価格

＊　本稿は昭和 62 年 10 月 17 日名古屋大学で行なわれた「金融学会，秋期大会」で報告したものを加筆，修正したものである。本稿作成に当って名古屋大学院大学早川弘晃先生から，また，大会当日，中央大学三宅武雄先生，長谷田彰彦先生，関西学院大学村田浩先生，早稲田大学畫間文彦先生，中京短期大学田中栄一先生からも有益なコメントを戴きました。ここに，紙面をおかりしてお礼申し上げます。

に対する完全情報を入手できる場合には，貨幣は「非中立的」となり，政府が貨幣供給率を変化させて行う政策の有効性が明らかとなった（Hayakawa（1986））。

今日のように，政府が財政・金融政策を通じて，もしくは，赤字国債の発行によって，国内需要を拡大し，GNP を増大しなければならない場合，貨幣経済の枠組みの中では如何なる事態が発生するか，という問題は財政・金融政策を理論的に研究するうえで解決しておかなければならない基本的研究課題となる。

そこで，本稿では，家計が自己の最適化行動に対して価格がどのように変化するかを事前的に知っている場合を考慮した，簡単な貨幣経済モデルを用いて，財政･金融政策を通じて行なわれる拡張政策（名目貨幣供給率，税率，政府直接支出）の効果を検討する。

II モ　デ　ル

一国閉鎖経済を前提として，貨幣を無償で発行する政府と，企業と家計の両面を兼ね備える多数の個人が存在する。各個人は均一であり，その中の一人を取りあげて代表的個人と呼ぶことにする。財市場と貨幣市場が存在し，各市場は毎時点需要と供給が常に一致しているものとする。

各経済主体（家計，政府）のバランスシートは以下のように表すことができるものとする。

家計 収入	家計 支出	政府 収入	政府 支出
$\tau\{f(k;g)+(\theta-\pi)\}$	$\tau\{f(k;g)+(\theta-\pi)\}$ c $s=(\dot{k}+nk)+(\dot{m}+nm)$	$\tau\{f(k;g)+(\theta-\pi)\}$ $\dot{m}+mn$	g

代表的個人は，自己の富（＝資産）を実物資本と実質現金残高に配分して保有する初期富と各時点における富の増加分を制約として，毎時点消費と実質現金残高からなる異時点効用関数のゼロから無限時点までの積分値，すなわち，これを個人の Welfare W と呼べば，このWを極大にするようこの個人は行動する。これによって，代表的個人の家計における最適な消費，実質現金残高，実物資本の経路が決定される。しかも，この個人は自分の経済活動が経済全体に与える効果を経験的に知っておりこの効果を予測しながら主体的行動を行うものとする。

代表的個人の Welfare W は，ゼロから無限時点までの異時点効用関数の積分値で表されるものとする。

(1)　$W=\int_0^{\infty} U(c_t, m_t)e^{-\rho t}dt$

$\rho > 0$ ：const. $m_t = M_t/P_t\ L_t$

U　：一人当りの効用

c_t　：t 時点における一人当りの実質消費

m_t　：t 時点における一人当りの実質現金残高

M_t　：t 時点における名目貨幣量

P_t　：t 時点における総労働量

ρ　：時間選好率（or 割引率）

ここで，効用関数は，連続で２回微分可能であり，以下の性質を満たすものとする。

(２－a)　$U_c > 0$，$U_c > 0$

(２－b)　$U_{cc} < 0$，$U_{mm} < 0$

(２－c)　$U_{cm} = U_{mc} > 0$

(２－d)　$\lim_{c_t \to \infty} U_c = 0$，$\lim_{c_t \to 0} U_c = \infty$

$\lim_{m_t \to \infty} U_m = 0$，$\lim_{m_t \to 0} U_m = \infty$

この個人は，t 時点における一人当りの総富の残高 a_t を一人当り実物資本 k_t と一人当り実質現金残高（＝貨幣）m_t に配分して所有することができるとする。

(3)　$a_t = k_t + m_t$: $k_t = k_t / L_t$

a_t　：t 時点における一人当り総富の残高

k_t　：t 時点における一人当り実質資本

k_t　：t 時点における総実物資本

また，どの時点 t においても，個人の可処分所得 y_t^d は，税引き後の，t 時点における一人当り総生産物 $f(k_t ; g)$ と，t 時点における一人当りの貨幣の増加にともなう実質現金残高の増分 θm_t から t 時点における一人当りの現実の物価上昇による実質現金残高の減額分を考慮したものから構成されるものとする。

(4)　$$y_t^d = (1-\tau)\{f(k_t ; g) + (\theta - \frac{\dot{P}_t}{P_t}) m\}$$

τ：（所得）税率；$0 < \tau < 1$.

g：政府支出

θ：実質現金残高の増加率

$\dot{P}_t / P_t$：t 時点における現実の物価上昇率

さらに，この可処分所得は，どの時点 t においても t 時点における一人当りの実質消費 c_t と実質貯蓄 s_t に配分されるものとする。

(5)　$y_t^d = (1-\tau)(c_t + s_t)$

実質貯蓄 s_t は実物資産と貨幣で保有されるものとする。すなわち，s_t は t 時点における一人当り実物資本蓄積 $\dot{k}_t$ と実質現金残高の増分 $\dot{m}_t$ に労働人口成長率 n をそれぞれ考慮したものにひとしい。

(6) $s_t = \dot{k}_t + nk_t + \dot{m}_t : n = \dot{L}_t / L_t$

従って，(4)(5)(6)より $\dot{k}_t + \dot{m}_t$ は

(7) $$\dot{k}_t + \dot{m}_t = s_t - nk_t - nm_t = y_t^b - c_t - nk_t - nm_t$$
$$= (1-\tau)\{f(k_t; g) + (\theta - \frac{\dot{P}_t}{P_t}) m_t\} - c_t - nk_t - nm_t$$

となる。

一方，t 時点における一人当りの総富の増加分 $\dot{a}$ は，(3)を t で微分することによって得られる。

(8) $\dot{a}_t = \dot{k}_t + \dot{m}_t$

よって，(7)(8)から $\dot{a}$ は，

(9) $$\dot{a}_t = (1-\tau)\{f(k_t; g) + (\theta - \frac{\dot{P}_t}{P_t}) m_t\} - c_t - nk_t - nm_t$$

となる。

ここで，政府支出 g は，GNP を増加させるエレメントとして各企業に提出される。すなわち，民間企業の投資効果がより円滑に促進されるような形で政府支出が運用されるものと仮定する。具体的には，投資減税的なもの，工業団地の提供による工場用地の低価格取得等，さらには民間プロジェクトに対するいろいろな優遇措置，などをここで考えることにする。

また，生産関数 $f(k_t; g)$ は，一次同次関数で，2回微分可能な達続関数，すなわち，通常の Well-behaved な新古典派生産関数であり，以下の性質を満足するものと仮定される。

(10－a) $\lim_{k_t \to 0} f(k_t; g) = 0$，$\lim_{k_t \to \infty} f(k_t; g) = \infty$

(10－b) $f_i(k_t; g) > 0$，$f_{ii}(k_t; g) < 0$，$f_{ij}(k_t; g) > 0$

(10－c) $\lim_{i \to 0} f_i(k_t; g) = \infty$，$\lim_{i \to \infty} f_i(k_t; g) = 0$; i and $j = k_t, g$.

物価上昇率は個人にとって所与であり，この個人の収集可能な物価情報は完全なものであるため，個人の物価上昇率に対する予測は常に現実の物価上昇率と一致すると仮定する。

(11)　$\pi_t = E\left(\dfrac{\dot{P}_t}{P_t}\right) = \dfrac{\dot{P}_t}{P_t}$

$E\left(\dfrac{\dot{P}_t}{P_t}\right)$：現実の物価上昇率の期待値

最後に，政府は，政府支出の財源を税収でもって賄うが，その不足部分は貨幣の増発でもって行うものとする。

(12)　$\dot{m}_t = g - \tau\{f(k_t\,;g) + (\theta - \dot{P}_t/P_t)\,m_t\} - nm_t$

異時点最適化問題の枠組みにおける個人の主体的均衡問題は(1)－(12)より以下のように表すことができる。

(13－a)　$\mathrm{Max} \displaystyle\int_0^\infty U(c_t, m_t)e^{-\rho t}dt$

s.t.

(13－b)　$a_t = k_t + m_t$

(13－c)　$\dot{a}_t = (1-\tau)[f(k_t\,;g) + (\theta-\pi)\,m_t] - c_t - nk_t - nm_t$

(14－a)　$a_t > 0$，$c_t > 0$，$k_t > 0$，$m_t > 0$，for all t

(14－b)　$a_0 > 0$，$c_0 > 0$，$k_0 > 0$，$m_0 > 0$

よって，ラグランジアン L は以下のように定めることができる。

(15)　$$L = \int_0^\infty [U(c_t, m_t) + \lambda_t\{(1-\tau)\{f(k_t;g) + (\theta-\pi)m_t\} - c_t - nk_t - nm_t - \dot{a}_t\} + \delta_t\{a_t - k_t - m_t\}]e^{-\rho t}dt$$

λ_t, δ_t：ラグランジュ乗数

最大化のための一階の条件と Transversality Condition はそれぞれ次のようになる (see, Arrow-Kruz (1970) chap. II)。

(16－a)　$U_c(c_t,\ m_t)=\lambda_t$

(16－b)　$U_m(c_t,\ m_t)+\lambda_t[(1-\tau)(\theta-\pi)-n]=\delta_t$

(16－c)　$(1-\tau)\{f_k(k_t\ ;\ g)-n=\delta_t/\lambda_t$

(16－d)　$\dot{\lambda}_t=\rho\lambda_t-\delta_t$

(16－e)　$\lim_{t\to\infty} a_t\lambda_t e^{-\rho t}=0$　(Transversality Condition)

煩雑さをさけるため以下では添字の t を省略する。

1階の条件から，未知数は 6 (a_t, c_t, m_t, k_t, λ_t, ρ_t)，方程式は 6 ((14－b) (14－c) (16－a) (16－b) (16－c) (16－d)) でありモデルは完結する。

次に 2 階の条件を求める。まず，準備のために (16－b) (16－c) より (17) を得る。

(17)　$U_m+\lambda[(1-\tau)\{\theta-\pi-f_k(k\ ;\ g)\}]=0$

(16－a) (17) (15－b) から，所与の時点 t における c, m, k の “derived demand function” が a と λ から成る関数として表すことができる。従って，(16－a) (17) (15－b) を解くことによって

(18)　$c=c(a,\ \lambda\ ;\ \pi,\ \tau,\ g,\ \theta)$

$m=m(a,\ \lambda\ ;\ \pi,\ \tau,\ g,\ \theta)$

$k=k(a,\ \lambda\ ;\ \pi,\ \tau,\ g,\ \theta)$

と表現することができる (See, Arrow-Kruz (1970), chap. IV)。

さて，(16－a) (17) (15－b) を全微分し，行列の形で表現すると，以下のようになる。

$$(19)\quad M\cdot\begin{bmatrix} dc \\ dm \\ dk \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d\lambda \\ -(1-\tau)Ad\lambda-\lambda(1-\tau)d\theta+\lambda Ad\tau+\lambda(1-\tau)f_{kg}dg \\ -da \end{bmatrix}$$

$$A=(\theta-\pi-f_k)$$

$$M=\begin{bmatrix} U_{cc}-U_{cm} & 0 \\ U_{mc} \quad U_{mm} & -\lambda(1-\tau)f_{kk}(k;g) \\ 0 \quad -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ここで（14－a）は両辺に－1を掛けてある。

2階の条件が満足されるためには，以下の条件が満たされなければならない。

《a》 1階の主座小行列式は全て負

(20－a) $U_{cc}<0$, $U_{mm}<0$, $-1<0$.

《b》 2階の主座小行列式は全て正

$$(20-\mathrm{b})\begin{cases} -U_{mm}-\lambda(1-\tau)f_{kk}(k;g)>0 \\ -U_{cc}>0, \\ U_{cc}U_{mm}-U_{cm}^2>0. \end{cases}$$

《c》 $Det\ M<0$

(20－c) $Det\ M=-U_{cc}U_{mm}+\lambda(1-\tau)f_{kk}(k;g)+U_{cm}^2<0$

《a》～《c》が満足されるならば，dc/da, $dc/d\lambda$, dm/da, $dm/d\lambda$, dk/da, $dk/d\lambda$ はそれぞれ以下のようになる。

$$(21-\mathrm{a})\quad \frac{dc}{da}=\frac{1}{DetM}U_{cm}\lambda(1-\tau)f_{kk}(k;g)>0$$

$$(21-\mathrm{b})\quad \frac{dc}{d\lambda}=\frac{-1}{DetM}[U_{mm}+\lambda(1-\tau)f_{kk}(k;g)$$
$$+U_{cm}(1-\tau)\{\theta-\pi-f_k(k;g)\}]<0$$

$$(21-\mathrm{c})\quad \frac{dc}{d\pi}=\frac{1}{DetM}[U_{cm}\lambda(1-\tau)]<0$$

$$(21-\mathrm{d})\quad \frac{dc}{d\tau}=\frac{1}{DetM}\left[U_{cm}\lambda\{\theta-\pi-f_k(k\,;g)\}\right]>0$$

$$(21-\mathrm{e})\quad \frac{dc}{dg}=\frac{-1}{DetM}\left[U_{cm}\lambda(1-\tau)f_{kg}(k\,;g)\right]<0$$

$$(21-\mathrm{f})\quad \frac{dc}{d\theta}=\frac{-1}{DetM}\left[U_{cm}\lambda(1-\tau)\right]>0$$

$$(22-\mathrm{a})\quad \frac{dm}{da}=\frac{-1}{DetM}U_{cc}\lambda(1-\tau)f_{kk}(k\,;g)>0$$

$$(22-\mathrm{b})\quad \frac{dm}{d\lambda}=\frac{1}{DetM}\left[U_{cc}(1-\tau)\{\theta-m-f_k(k\,;g)\}-U_{cm}\right]<0$$

$$(22-\mathrm{c})\quad \frac{dm}{d\pi}=\frac{-1}{DetM}\left[U_{cc}\lambda(1-\tau)\right]<0$$

$$(22-\mathrm{d})\quad \frac{dm}{d\tau}=\frac{-1}{DetM}\left[U_{cc}\lambda\{\theta-\pi-f_k(k\,;g)\}\right]>0$$

$$(22-\mathrm{e})\quad \frac{dm}{dg}=\frac{-1}{DetM}\left[U_{cc}\lambda(1-\tau)f_{kg}(k\,;g)\right]<0$$

$$(22-\mathrm{f})\quad \frac{dm}{d\theta}=\frac{1}{DetM}\left[U_{cc}\lambda(1-\tau)\right]>0$$

$$(23-\mathrm{a})\quad \frac{dk}{da}=\frac{-1}{DetM}\left[U_{cc}U_{mm}-U_{cm}^2\right]=1-\frac{dm}{da}>0$$

$$(23-\mathrm{b})\quad \frac{dk}{d\lambda}=\frac{-1}{DetM}\left[U_{mc}+U_{cc}(1-\tau)\{\theta-\pi-f_k(k\,;g)\}\right]>0$$

$$(23-\mathrm{c})\quad \frac{dk}{d\pi}=\frac{1}{DetM}\left[U_{cc}\lambda(1-\tau)\right]>0$$

$$(23-\mathrm{d})\quad \frac{dk}{d\tau}=\frac{1}{DetM}\left[U_{cc}\lambda\{\theta-\pi-f_k(k\,;g)\}\right]<0$$

$$(23-\mathrm{e})\quad \frac{dk}{dg}=\frac{1}{DetM}\left[U_{cc}\lambda(1-\tau)f_{kg}(k\,;g)\right]>0$$

$$(23-\mathrm{f})\quad \frac{dk}{d\theta}=\frac{-1}{DetM}\left[U_{cc}\lambda(1-\tau)\right]<0$$

ここで, 富の増加以上に実物資本は, 増加しないため, $1>dk/da>0$, $1>dm/da>0$ となる。

従って，c，m，k の derived demand functions は，

(25－a)　$c = c\,(a,\ \lambda\ ;\ \pi,\ \tau,\ g,\ \theta)$;

$$c_a > 0,\ c_\lambda < 0,\ c_\pi < 0,\ c_\tau > 0,\ c_g < 0,\ c_\theta > 0.$$

(25－b)　$m = m\,(a,\ \lambda\ ;\ \pi,\ \tau,\ g,\ \theta)$;

$$1 > m_a > 0,\ m_\lambda < 0,\ m_\pi < 0,\ m_\tau > 0,\ m_g < 0,\ m_\theta > 0.$$

(25－c)　$k = k\,(a,\ \lambda\ ;\ \pi,\ \tau,\ g,\ \theta)$;

$$1 > k_a > 0,\ k_\lambda > 0,\ k_\pi > 0,\ k_\tau < 0,\ k_g > 0,\ k_\theta < 0.$$

と表すことができる。

さて，今までは価格情報は個人にとって所与であった。ここで各個人は静学的立場から，(25)を基にして期待物価の上昇によって何が引き起こされるかを正確に把握することができるとする。すなわち，期待物価の上昇は各個人の消費を減退させる。反対に，個人消費の増加は個人の実物財への選好が高いことを示しており各個人はポートフォリオバランスのなかで実物費本蓄積の増加と実質現金残高の減少をおこなう。従って，逆に，個人は，自己のポートフォリオ選好によって，物価水準がどのように変化するかを予想することができ，我々はこれを一人当り実物資本 k と，実質現金残高 m，に依存する期待物価上昇率 π の関数として表すことができると仮定する。ここでは，個人はポートフォリオ上で実物資本をより多く求めるならば，インフレ的となり($\pi_k > 0$)，反対に実質現金残高を多く求めるような時は，デフレ的($\pi_m < 0$)となるということを知ることができる。また，単純化のため π の関数は連続で1階微分可能な線形関数を仮定する。

(26)　$\pi = \pi\,(k,\ m\ ;\ \theta)\ ;\ \pi_k > 0,\ \pi_m < 0$

個人の主体的均衡問題は(13)－(26)より以下のように表すことができる。

以上の事項より価格情報を完全に先読みすることのできる。

(27－a)　$$\mathrm{Max} \int_0^\infty U(c, m)\, e^{-\rho t}\, dt$$

s. t.

(27－b)　$a=k+m$

(27－c)　$\dot{a}=(1-\tau)[f(k;g)+\{\theta-\pi(k,\ m)m\}]-c-nk-nm$

(28－a)　$a_t>0$, $c_t>0$, $k_t>0$, $m_t>0$, for all t

(28－b)　$a_0>0$, $c_0>0$, $k_0>0$, $m_0>0$

よって，ラグランジアン L は以下のように定めることができる。

(29)
$$L=\int_0^{\infty}[U(c,m)+\lambda\{(1-\tau)\{f(k;g)+(\theta-\pi(k,m))m\} -c-nk-nm-\dot{a}\}+\delta\{a-k-m\}]e^{-\rho t}dt$$

最大化のための一階の条件と Transversality Condition はそれぞれ次のようになる (see, Arrow-Kruz (1970) chap. II)。

(30－a)　$U_c(c,\ m)=\lambda$

(30－b)　$U_m(c,\ m)+\lambda[(1-\tau)\{\theta-\pi(k,\ m)-\pi_m(k,\ m)m\}-n]=\delta$

(30－c)　$(1-\tau)\{f_k(k;g)-\pi_k(k,\ m)m\}-n=\delta/\lambda$

(30－d)　$\dot{\lambda}=\rho\lambda-\delta$

(30－e)　$\lim_{t\to\infty} a_t\lambda_t e^{-\rho t}=0$　(Transversality Condition)

1階の条件から，未知数は 6 (a, c, m, k, λ, ρ)，方程式は 6 ((27－b) (27－c) (30－a) (30－b) (30－c) (30－d)) でありモデルは完結する。

次に 2 階の条件を求める。まず，準備のために (30－b) (30－c) より (31) を得る。

(31)　$U_m+\lambda[(1-\tau)\{\theta-\pi(k,\ m)+(\pi_k-\pi_m)m-f_k(k;g)\}-n]=0$

(30－a) (31) (27－b) から，所与の時点 t における c, m, k の“derived demand function” が a と λ から成る関数として表すことができる。

(32)　$c=c(a,\ \lambda)$, $m=m(a,\ \lambda)$, $k=k(a,\ \lambda)$

と表現することができる (See, Arrow-Kruz (1970), chap. IV)。

さて，(30－a)(31)(27－b)を全微分し，行列の形で表現すると，以下のようになる。

$$(33)\quad M'\cdot\begin{bmatrix} dc \\ dm \\ dk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\lambda \\ -(1-\tau)A'd\lambda-\lambda(1-\tau)d\theta+\lambda A'd\tau+\lambda(1-\tau)f_{kg}dg \\ -da \end{bmatrix}$$

$$A'=\{\theta-\pi-f_k+(\pi_k-\pi_m)m\}$$

$$M'=\begin{bmatrix} U_{cc} & U_{cm} & 0 \\ U_{mc} & U_{mm}+\lambda(1-\tau)(\pi_k-2\pi_m) & -\lambda(1-\tau)\{f_{kk}(k;g)+\pi_k\} \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ここで(27－b)は両辺に－1を掛けてある。

2階の条件が満足されるためには，以下の条件が満たされなければならない。

《a'》　1階の主座小行列式は全て負

$$(34-a)\begin{cases} U_{cc}<0, \\ U_{mm}+\lambda(\pi_k-2\pi_m)<0, \\ -1<0. \end{cases}$$

《b'》　2階の主座小行列式は全て正

$$(34-b)\begin{cases} -\{U_{mm}+\lambda(1-\tau)(\pi_k-2\pi_m)\} \\ -\lambda(1-\tau)\{f_{kk}(k;g)+\pi_k\}>0 \\ -U_{cc}>0, \\ U_{cc}\{U_{mm}+\lambda(1-\tau)(\pi_k-2\pi_m)\}-U_{cm}^2>0. \end{cases}$$

《c'》　$Det\ M'<0$

(34－c)　$Det\ M' = -U_{cc}\{U_{mm} + \lambda(1-\tau)(2(\pi_k - \pi_m) + f_{kk}(k;g))\} + U_{cm}^2 < 0$

《a'》～《c'》が満足されるならば，dc/da，$dc/d\lambda$，dm/da，$dm/d\lambda$，dk/da，$dk/d\lambda$ はそれぞれ以下のようになる。

(35－a)　$\dfrac{dc}{da} = \dfrac{-1}{DetM'} U_{cm}\lambda(1-\tau)\{f_{kk}(k;g) + \pi_k\} > 0$

(35－b)　$\dfrac{dc}{d\lambda} = \dfrac{-1}{DetM'}[U_{mm} + \lambda(1-\tau)\{2(\pi_k - \pi_m) + f_{kk}(k;g)\} + U_{cm}(1-\tau)\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f_k(k;g) + n\}] < 0$

(35－c)　$\dfrac{dc}{d\theta} = \dfrac{-1}{DetM'}[U_{cm}\lambda(1-\tau)] > 0$

(35－d)　$\dfrac{dc}{d\tau} = \dfrac{1}{DetM'}[U_{cm}\lambda\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f_k(k;g) + n\}] > 0$

(35－e)　$\dfrac{dc}{dg} = \dfrac{1}{DetM'}[U_{cm}\lambda(1-\tau)f_{kg}(k;g)] < 0$

(36－a)　$\dfrac{dm}{da} = \dfrac{-1}{DetM'} U_{cc}\lambda(1-\tau)\{f_{kk}(k;g) + \pi_k\} > 0$

(36－b)　$\dfrac{dm}{d\lambda} = \dfrac{1}{DetM'}[U_{cc}(1-\tau)\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f_k(k;g) + n\} + U_{mc}] < 0$

(36－c)　$\dfrac{dm}{d\theta} = \dfrac{1}{DetM'}[U_{cc}\lambda(1-\tau)] > 0$

(36－d)　$\dfrac{dm}{d\tau} = \dfrac{-1}{DetM'}[U_{cc}\lambda\{(\theta - \pi - n) + (\pi_k - \pi_m)m - f_k(k;g) + n\}] > 0$

(36－e)　$\dfrac{dm}{dg} = \dfrac{-1}{DetM'}[U_{cc}\lambda(1-\tau)f_{kg}(k;g)] < 0$

(37－a) $\dfrac{dk}{da}=\dfrac{-1}{DetM'}[U_{cc}\{U_{mm}+\lambda(1-\tau)(\pi_k-2\pi_m)\}-U_{cm}^2]$

$$=1-\frac{dm}{da}>0$$

(37－b) $\dfrac{dk}{d\lambda}=\dfrac{-1}{DetM'}[U_{mc}+U_{cc}(1-\tau)\{(\theta-\pi-n)$

$$+(\pi_k-\pi_m)m-f_k(k;g)+n\}]>0$$

(37－c) $\dfrac{dk}{d\theta}=\dfrac{-1}{DetM'}[U_{cc}\lambda(1-\tau)]<0$

(37－d) $\dfrac{dk}{d\tau}=\dfrac{1}{DetM'}[U_{cc}\lambda\{(\theta-\pi-n)+(\pi_k-\pi_m)m$

$$-f_k(k;g)+n\}]<0$$

(37－e) $\dfrac{dk}{dg}=\dfrac{1}{DetM'}[U_{cc}\lambda(1-\tau)f_{kg}(k;g)]>0$

ここで，富の増加以上に実物資本は，増加しないため，$1>dk/da>0$，$1>dm/da>0$ となり，$f_{kk}(k;g)+\pi_k<0$ となる。

従って，c，m，k の derived demand functions は，

(38－a) $c=c(a,\ \lambda;\theta,\ \tau,\ g)$；

$$c_a>0,\ c_\lambda<0,\ c_\theta>0,\ c_\tau>0,\ c_g<0.$$

(38－b) $m=m(a,\ \lambda;\theta,\ \tau,\ g)$；

$$1>m_a>0,\ m_\lambda<0,\ m_\theta>0,\ m_\tau>0,\ m_g<0.$$

(38－c) $k=k(a,\ \lambda;\theta,\ \tau,\ g)$；

$$1>k_a>0,\ k_\lambda>0,\ k_r<0,\ k_\theta<0,\ k_\tau<0,\ k_g>0.$$

と表すことができる。

次に，動学的分析を行う。$\dot{a}=0$，$\dot{\lambda}=0$ のとき，(同時に $\dot{c}=0$，$\dot{m}=0$，$\dot{k}=0$ が成立する。) これを定常状態と呼ぶ。この時の均衡点 $(a^*,\ \lambda^*)$ (または $(c^*,\ m^*,\ k^*)$) を最適均衡点と呼ぶことにする。さらに，この最適均衡点に至る経路を最適均衡経路と呼ぶことにする。

まず，1階の条件から（(30－a）～(30－d）より）この最適均衡点上では，

(39) $$\rho=\frac{\delta}{\lambda}=\frac{U_m(c^*, m^*)}{U_c(c^*, m^*)}$$

$$+(1-\pi)\{\theta-\pi(k^*, m^*)\pi_m(p^*, m^*)m^*\}-n$$

$$=(1-\tau)\{f_k(k^*;g)-\pi_k(k^*, m^*)m^*\}-n.$$

次に，(a, λ) 平面で最適均衡点 (a^*, λ^*) が達成された時の均衡点の近傍における安定性について分析する。1階の条件を考慮すると，(30－d)と(27－b）から $\dot{\lambda}/\lambda$ と $\dot{a}$ の動学方程式体系は，

(40－a） $$\dot{\lambda}/\lambda=\rho-(1-\tau)\{f_k(k(a, \lambda);g)$$
$$-\pi_k(k(k(a, \lambda), m(a, \lambda))m(a, \lambda)\}+n$$

(40－b） $$\dot{a}=(1-\tau)[f_k(k(a, \lambda))$$
$$+\{\theta-\pi(k(a, \lambda), m(a, \lambda))\}m(a, \lambda)]$$
$$-c(a, \lambda)-nk(a, \lambda)-nm(a, \lambda)$$

となる。(40）を (a^*, λ^*) の近傍で線形近似したものを行列で表すと，

(41) $$\begin{bmatrix}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\\ \dot{a}\end{bmatrix}=N\begin{bmatrix}\lambda-\lambda^*\\ a-a^*\end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix}-(1-\tau)\{f_{kk}k_\lambda-\pi_k m_\lambda\} & -(1-\tau)\{f_{kk}k_a-\pi_k m_a\}\\ FK_\lambda-Gm_\lambda-c_\lambda & FK_a-Gm_a-c_a\end{bmatrix}$$

$$F=(1-\tau)(f_k-\pi_k m)-n$$

$$G=(1-\tau)(\pi_m m-n)+n$$

となる。

1階，2階の条件と Transversality Condition から，最適均衡点は Saddle Point となる（Sidrauski (1965))。従って，$Det\ N<0$ となる。

θ, τ, g の上昇にともなって (a^*, λ^*) が受ける影響を分析する。$\dot{\lambda}/\lambda=0$, $\dot{a}=0$ として (38) a^*, λ^*, θ, τ, g で全微分すると以下のようになる。

$$(42-\mathrm{a})\quad N^*\begin{bmatrix} d\lambda^* \\ da^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\,d\theta & -(f_k^*-\pi_k^* m^*)d\tau & (1-\tau)f_{kg}^* dg \\ -(1-\tau)m^* d\theta & \{f^*-(\theta-\pi^*)m^*\}d\tau & -(1-\tau)f_g^* dg \end{bmatrix}$$

$$(42-\mathrm{b})\quad \frac{d\lambda^*}{d\theta}=\frac{1}{DetN^*}(1-\tau)^2\{\pi_k^* m_a^*-f_{kk}^* k_a^*\}<0$$

$$(42-\mathrm{b}')\quad \frac{da^*}{d\theta}=\frac{1}{DctN^*}(1-\tau)^2(\pi_k^*+f_{kk}^*)\,k_\lambda^*>0$$

$$(42-\mathrm{c})\quad \frac{d\lambda^*}{d\tau}=\frac{1}{DetN^*}[-(f_k^*-\pi_k^* m^*)(F^* k_a^*-G^* m_a^*-c_a^*)$$
$$-(1-\tau)\{f_{kk}^* k_a^*-\pi_k^* m_a^*\}\{f^*-(\theta-\pi^*)$$
$$m^*\}]$$

$$(42-\mathrm{c}')\quad \frac{da^*}{d\tau}=\frac{1}{DetN^*}[-(1-\tau)\{(\pi_k^*+f_{kk}^*)\,k_\lambda^*\}\{f^*-(\theta-\pi^*)\,m^*\}$$
$$+(f_k^*-\pi_k^* m^*)(F^* k_\lambda^*-G^* m_\lambda^*-c_\lambda^*)]<0$$

$$(42-\mathrm{d})\quad \frac{d\lambda^*}{dg}=\frac{1}{DetN^*}[(1-\tau)f_{kg}^*(F^* k_a^*-G^* m_a^*-c_a^*)$$
$$-(1-\tau)^2\{f_{kk}^* k_a^*-\pi_k^* m_a^*\}$$

$$(42-\mathrm{d}')\quad \frac{da^*}{dg}=\frac{1}{DetN^*}[(1-\tau)^2 f_g^*(\pi_k^*+f_{kk}^*)\,k_\lambda^*$$
$$-(1-\tau)f_{kg}^*(F^* k_\lambda^*-G^* m_\lambda^*-c_\lambda^*)]>0$$

$$F^* k_a^*-G^* m_a^*-c_a^*=\{(1/U_{cc}^*)-(U_m^*/U_c^*)\}m_a^*+\rho$$

ここで添字の＊印は，最適均衡点上で達成された a^*, λ^*, c^*, m^*, k^*, の変数を構成要素としていることを示している。

次に θ, τ, g の上昇が最適均衡点 (c^*, m^*, k^*) にどのような影響を与えるかを分析する (see Calvo (1979))。

まず (17－a) を t で微分し $\dot{c}$ の方程式を求める。

$$(43)\quad \dot{c}=\frac{\lambda}{U_{cc}}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}-\frac{U_{cm}}{U_{cc}}\dot{m}$$
$$=\frac{U_c}{U_{cc}}[\rho-(1-\tau)\{f_g(k\,;g)-\pi_k m\}+n]$$
$$-\frac{U_{cm}}{U_{cc}}[g-\tau\{f(k\,;g)+(\theta-\pi(k,\ m))m\}-nm]$$

また，(8)(13)(40－b) を利用して，実質資本の増分 $\dot{k}$ は

$$(44)\quad \dot{k}=\dot{a}-\dot{m}$$
$$=f(k\,;g)+\{\theta-\pi(k,\ m)\}m-nk-g-c$$

となる。

従って，1階の条件 (34－a) ～(34－c) を満たした (c, m, k) の動学方程式体系は

$$(45\text{－a})\quad \dot{c}=\frac{U_c}{U_{cc}}[\rho-(1-\tau)\{f_k(k\,;g)-\pi_k m\}]$$
$$-\frac{U_{cm}}{U_{cc}}[g-\tau\{f(k\,;g)+(\theta-\pi(k,\ m))m\}-nm]$$

$$(45\text{－b})\quad \dot{m}=g-\tau\{f(k\,;g)+(\theta-\pi(k,\ m))m\}-nm$$

$$(45\text{－c})\quad \dot{k}=f(k\,;g)+(\theta-\pi(k,\ m))m-nk-g-c$$

となる。

$$(46-\mathrm{a})\quad \begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{m} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = \underline{M}\cdot\begin{bmatrix} c-c^* \\ m-m^* \\ k \quad k^* \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{U_c}{U_{cc}}(1-\tau)\pi_k-\dfrac{U_{cm}}{U_{cc}}\{\tau(\pi_m m-n)-n\} & -\dfrac{U_c}{U_{cc}}(1-\tau)f_{kk}+\dfrac{U_{cm}}{U_{cc}}\tau(f_k-\pi_k m) \\ 0 & \tau(\pi_m m-n)-n & -\tau(f_k-\pi_k m) \\ -0 & -\pi_m m+n & f_k-\pi_k m-n \end{bmatrix}$$

また $DetM$ は，

$$(46-\mathrm{b})\quad DetM=\frac{U_c}{U_{cc}}[(\rho+n)\tau\{\pi_k+f_{kk})-\{\tau\frac{U_m}{U_c}-(1-\tau)n\}f_{kk}]$$

となる。

もし，最適均衡点 $(c^*,\ m^*,\ k^*)$ が達成されるとすれば，名目貨幣成長率 θ，税率 τ，政府支出 g の変化によって $(c^*,\ m^*,\ k^*)$ がどのような影響を受けるかを分析する。

$\dot{c}=0$，$\dot{m}=0$，$\dot{k}=0$ とした (45) の各式を c^*，m^*，k^*，θ，τ，g で全微分したものを行列で表現すると，

$$(47)\quad \underline{M}\cdot\begin{bmatrix} dc^* \\ dm^* \\ dk^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Phi_1^* d\theta & \Phi_2^* d\tau & \Phi_3^* dg \\ \tau m^* d\theta & \{f^*+(\theta-\tau^*)m^*\}d\tau & -(1-\tau f_g^*)dg \\ -m^* d\theta & 0 & -(f_g^*-1)dg \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1^*=-\frac{U_{cm}^*}{U_{cc}^*}\tau m$$

$$\Phi_2^*=-\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}(f_k^*-\pi_k^* m^*)-\frac{U_{cm}^*}{U_{cc}^*}\{f^*+(\theta-\pi^*)m^*\}$$

となる。よって，$dc^*/d\theta$, $dm^*/d\theta$, $dk^*/d\theta$, $dc^* d\tau$, $dm^*/d\tau$, $dk^*/d\tau$, dc^*/dg, dm^*/dg, dk^*/dg は，それぞれ，

$$(47-\mathrm{a})\quad \frac{dc^*}{d\theta}=\frac{1}{Det\underline{M}^*}(1-\tau)nm^*\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}(f_{kk}^*-\tau\pi_k^*)$$

$$(47-\mathrm{b})\quad \frac{dm^*}{d\theta}=\frac{1}{Det\underline{M}^*}[-\tau m^*\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}(1-\tau)f_{kk}^*]$$

$$(47-\mathrm{c})\quad \frac{dk^*}{d\theta}=\frac{1}{Det\underline{M}^*}[-\tau m^*\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}(1-\tau)\pi_k^*]$$

$$(48-\mathrm{a})\quad \frac{dc^*}{d\tau}=\frac{1}{Det\underline{M}^*}[\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}(f_k^*-\pi_k^*m^*)(\pi_m^*m^*-n)\tau n$$
$$-(1-\tau)\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}\{f^*+(\theta-\pi^*)m^*\}\{f_k^*-\pi_k^*m^*-n)\pi_k^*$$
$$-(\pi_{mm}^{**}-n)f_{kk}^*\}]$$

$$(48-\mathrm{b})\quad \frac{dm^*}{d\tau}=\frac{1}{Det\underline{M}^*}[-\{\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}(f_k^*-\pi_k^*m^*)\}\{\tau(f_k^*-\pi_k^*m^*)\}$$
$$+(1-\tau)\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}\{f^*+(\theta-\pi^*)m^*\}f_{kk}^*]$$

$$(48-\mathrm{c})\quad \frac{dk^*}{d\tau}=\frac{1}{Det\underline{M}^*}[-\{\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}(1-\tau)\pi_k^*\}\{f^*+(\theta-\pi^*)m^*\}$$
$$-\{\tau(\pi_m^*m^*-n)-n\}\{\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}(f_k^*-\pi_k^*m^*)\}]$$

$$(49-\mathrm{a})\quad \frac{dc^*}{dg}=\frac{1}{Det\underline{M}^*}(1-\tau)[\rho+\tau nf_g^*)(f_{kk}^*+\pi_k^*)+\{n(1-f_g^*)$$
$$-\frac{U_m^*}{U_c^*}\}f_{kk}^*-\tau n\frac{U_m^*}{U_c^*}f_{kg}^*]$$

$$(49-\mathrm{b})\quad \frac{dm^*}{dg}=\frac{1}{Det\underline{M}^*}[\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}(1-\tau)\{f_{kk}^*(1-\tau f_g^*)$$
$$+f_{kg}^*\tau(f_k^*-\pi_k^*m^*)\}]$$

$$(49-\mathrm{c})\quad \frac{dk^*}{dg}=\frac{1}{Det\underline{M}^*}\frac{U_c^*}{U_{cc}^*}(1-\tau)[(1-\tau f_g^*)\pi_k^* + f_{kg}^*\{\tau\pi_m^* m^*-(1+\tau)n\}]$$

となる。

今(a^*, λ^*)でSaddle pointである。よって(c^*, m^*, k^*)においてもSaddle Pointであると考えられる。そこで，負の特性根が二つ存在する場合は$Det\underline{M}>0$，負の特性根が一つのみの場合は$Det\underline{M}<0$となる。(29－b)より$d\lambda^*/d\theta<0$，この時，$dc^*/d\theta>0$ $(\theta\uparrow\to\lambda\downarrow\to U_c\downarrow\to c\uparrow)$とならなければならない。

従って，(47－a)より，$Det\underline{M}>0$でなければならない。

また，$1-\pi_\theta=0$ならば，

(50)　$d\lambda^*/d\theta=0$，$da^*/d\theta=0$

(51)　$dc^*/d\theta=0$，$dm^*/d\theta=0$，$dk^*/d\theta=0$

が得られる。ここでは，貨幣は「中立的」となる。また，この時，$\pi_k=0$，$\pi_m=0$となるので(39)は

$$(52)\quad \rho=\frac{U_m(c^*, m^*)}{U_c(c^*, m^*)}=f'(k^*)-n$$

となる。

III 結　論

以上の分析から導出結果を以下の表にまとめることができる。

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2"></th><th rowspan="2">θ</th><th rowspan="2">τ</th><th colspan="4">g</th></tr>
<tr><th colspan="2">(a)</th><th colspan="2">(b)</th></tr>
<tr><td colspan="2">a</td><td>+</td><td>−</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">λ</td><td>(1)</td><td rowspan="2">−</td><td>−</td><td colspan="2">?</td><td colspan="2" rowspan="2">−</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>?</td><td colspan="2">−</td></tr>
<tr><td rowspan="2">c</td><td>(1)</td><td rowspan="2">+</td><td>+</td><td colspan="2">?</td><td colspan="2" rowspan="2">+</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>?</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td colspan="2">m</td><td>−</td><td>+</td><td>?</td><td>−</td><td>+</td><td>−</td></tr>
<tr><td colspan="2">k</td><td>+</td><td>?</td><td>?</td><td>+</td><td>−</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td>a-1)</td><td>a-2)</td><td>b-1)</td><td>b-2)</td></tr>
</table>

(1) $\left(\frac{1}{U_{cc}}-\frac{U_m}{U_c}\right)m_a+\rho<0$, (2) $\left(\frac{1}{U_{cc}}-\frac{U_m}{U_c}\right)m_a+\rho>0$.

(a) $f_{kg}>0$, (b) $f_{kg}=0$, i－1) $1>\tau f_g$, i－2) $1<\tau f_g$, $\mathrm{i}=a, b$.

［1］経済が定常状態にある時，価格情報が家計の最適化行動を通して経済に及ぼす大きさだけ，Sidrauski (1967) の結果と異なる。(23)と(40)。

［2］定常状態における貨幣供給率 θ の増加は，それにともなう家計のインフレ期待が異なる（$1-\pi_\theta^*\gtrless 0$）かぎり，実物経済に影響を与える。すなわち，貨幣は「非中立的」となる(34)(47)(47)', (48)(49)49'。

［3］定常状態における θ の増加と，それにともなう家計のインフレ期待が

同じ（$1-\pi_\theta^*=0$）のとき，貨幣は「中立的」となる(50), (51)。Sidrauski (1967) の結果と一致する。

[4] Tobin (1965) や Hadjimichalkis (1971) etc. といった，Sollow タイプの成長モデルを基礎とした貨幣成長モデルにおいて貨幣は「非中立性」であった。

すなわち，Tobin, Hadjimichalakis etc. では，

$$sign\ (dm^*/d\theta) = -sign\ (dk^*/d\theta)$$

であり，θ の上昇効果は，貨幣と実物資本とでは，全く逆の効果を持っていた。

これに対して，個人の主体的活動を重視することのモデルでは，

$$1-\pi_\theta^*>0 \text{ のときは，} dm^*/d\theta<0,\ dk^*/d\theta>0$$

となり，Tobin (1965), Nagatani (1970) の結論と一致する。

$$1-\pi_\theta^*<0 \text{ のときは，} dm^*/d\theta>0,\ dk^*/d\theta>0,\ d\theta<0$$

となり，Hadjimichalakis (1971) の結論と一致する。

[5] $U_{cm}=0$ のケースでも結果は同じである。

[6] 各個人の可処分所得が合成の誤謬に基づいて定義されていないなら，すなわち，$y^d=f(k\,;g)$ ならば，貨幣は「中立的」である。(see, Hayakawa)

[7] 期待物価上昇率 π が各個人にとってパラメーターである場合，$c_\theta+c_\pi=0$ すなわち，貨幣は「中立的」となる。(see, Hayakawa)

[8] [1]～[7] の結論は飯田 (1987) と一致する。

[参考文献]

Arrow, K. J. and M. Kurz, *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy,* 1970, Johns Hopkins Press, Baltimore, chap. II and IV.

Brock, W. "Money and growth : the Case of Long Run Perfect Foresight," *International Economic Review,* V. 15 (Oct., 1974) 750−77.

Calvo, G. A., "On Models of Money and Perfect Foresight," *International Economic*

Review, V. 20 (Feb., 1979) 83−103.

Dornbush, R. and J. A. Frenkel, "Inflation and Growth : Alternative Approaches," *Journal of Money, Credit and Banking,* V. 5 (Frb., 1973) 141−56.

Hadjimichalakis, M. "Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money the Tobin Models," *Review of Economic Studies,* V. 38 (Oct., 1971) 457−79.

Hayakawa, H. "Intertemporal Optimization and Neutrality of Money in Growth Models," *Journal of Monetary Economics,* (Forcecoming).

——, "Rational Expectations, Price Dynamics, and Nonneutrality of Money under intertemporal Optimization," (University of Georgia), *Working Paper Series.* 1986.

Nagatani, K. "A Note on Professor Tobin's 'Money and Economic Growth'," *Econometrica,* V. 83 (Jan., 1970) 171−75.

Sidrauski, M. "Rational Choice and Patterns of Browth in a Monetary Economy," *American Economic Review : Paper and Proceeding.* V. 57 (Oct., 1967) 534−44.

Tobin, J. "Money and Economic Growth," *Econometrica,* V. 33 (Oct., 1965) 671−84.

飯田隆雄「貨弊経済における経済政策とその効果」『経済と経営』第 18 巻 2 号（1987 年 9 月）33−35.