

# 相対論的電磁界方程式の対称化について

村 田 茂 昭

## 1. 序 論

アンテナ工学の分野においては、等価磁流という概念がある。それによって、スロットアンテナの解析が行なわれており、実験によれば、満足すべき結果が得られている。しかし、現在の相対論的電磁場理論においては、磁荷、磁流の存在は、全く認められず、それを使用する解析は、便宜的なものであり、程度の低い解析方法であると考えられている。その理論的根拠は、現在の4次元のMaxwellの方程式においては、電気的量和磁氣的量の間に、なんの対称性も無いからである。しかるに、著者は、4次元電磁界理論につき、ふかく検討し、電気的量和磁氣的量に関する新しい対称性を持つ理論を構築することに成功した。磁気単極子は、実験的に、いまだに発見されていないが、この理論は、相対論的電磁界理論では、磁気単極子の存在の可能性を否定できないことを改めて主張している。

本論文においては、電気スカラーポテンシャル（電位） $\phi$  と磁気ポテンシャル $A$ をまとめて、電磁ポテンシャルと呼び、磁気スカラーポテンシャル（磁位） $\phi^*$  と電気ベクトルポテンシャル $A^*$ を、まとめて磁電ポテンシャルと呼ぶ。

本論文においては、一般相対論的手法を使用しているが、対象は、重力場のない平坦な時空に限っている。これは、重力場の理論は、電磁場の理論に比べていまだに未成熟であり、信頼できる定説がないこと、および、まず平坦な時空の電磁界理論を整備することが急務であると考えからである。

## 2. 従来の4次元理論とその盲点

### 2. 1 従来の4次元時空におけるMaxwellの方程式

基本テンソルを

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1, & & & 0 \\ & h_1^2, & & \\ & & h_2^2, & \\ 0 & & & h_3^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

とおき、 $x^\mu$  座標系を

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, u, v, w) \quad (2)$$

とする。ただし、 $h_k$  は測度係数 (metrical coefficient)、 $c$  は真空中の光速である。電磁ポテンシャルの、3次元の古典微分幾何学の量と、4次元のRiemann幾何学のベクトル量との対応関係は、下記の如くなる。（イタリック体は4次元時空の量を示す）

$$\left. \begin{aligned} \phi/c &= A^0 & (a) \\ A &= (A_u, A_v, A_w) = (h_1 A^1, h_2 A^2, h_3 A^3) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

以下においてはEinsteinの省略記法を採用する。たとえば

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} A^\nu \quad (4)$$

電磁場の共変テンソルは

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} 0, & -e_1/c, & -e_2/c, & -e_3/c \\ e_1/c, & 0, & b_3, & -b_2 \\ e_2/c, & -b_3, & 0, & b_1 \\ e_3/c, & b_2, & -b_1, & 0 \end{pmatrix} \quad (\mu \text{ 行 } \nu \text{ 列表示 以下同様}) \quad (6)$$

である。電磁場の反変テンソルは

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \quad (7)$$

$$= \begin{pmatrix} 0, & e^1/c, & e^2/c, & e^3/c \\ -e^1/c, & 0, & b^3, & -b^2 \\ -e^2/c, & -b^3, & 0, & b^1 \\ -e^3/c, & b^2, & -b^1, & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

ここで、 $e, b$  はそれぞれ 3 次元ベクトル電場  $E$ , 磁束密度  $B$  に対応するテンソルの成分である。  
( $b$  と  $B$  との対応は、3 次元空間がデカルト座標系でない場合は、いささか複雑であるが、ここでは論じない)

4 次元の Maxwell の方程式は、 $D_\mu$  を座標変数  $x^\mu$  に関する共変微分演算子、 $\partial_\mu$  を偏微分演算子として

$$D_\mu F^{k\mu} = \mu_0 i^k \quad (9)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (10)$$

である。ここで  $i^\mu$  は四次元電流密度ベクトルである。

$$i^\mu = (c\rho, i^1, i^2, i^3) \quad (11)$$

ただし  $\rho$  は電荷密度、 $i^k$  は電流密度に対応する。

(9) 式は、電磁場の Lagrangean を

$$L = -(1/(4\mu_0)) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu i^\mu \quad (12)$$

とおき、作用積分を零にすることによって得られる。

一方、(10) 式は、電磁場の共変テンソル  $F_{\mu\nu}$  が (5) 式の形をしていると、これは、Riemann 幾何学の恒等式である。また、この式は、下記の如く書くことができる。

$$(1/(2\sqrt{-g})) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 \quad (13)$$

$e^{k\mu\nu\rho}$  は反変的 Levi-Civita の記号である。なお、共変的 Levi-Civita の記号には、諸説あるが<sup>(1)</sup>、<sup>(2)</sup>、ここでは Landau の定義<sup>(3)</sup>に従った。(付録 I 参照)

電磁的 Lorentz 条件は

$$D_\mu A^\mu = 0 \quad (14)$$

となり、これより重力場を無視できる場合の Maxwell の方程式と等価な四次元ベクトル波動方程式を得る。

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu A^k = -\mu_0 i^k \quad (15)$$

(10) 式は、いわゆる dual テンソル<sup>(2)</sup>  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  (付録 I, II, III 参照) を用いて

$$\begin{aligned} D_\mu \tilde{F}^{k\mu} &= D_\mu \text{dual}(F_{\mu\nu}) \\ &= (1/(2\sqrt{-g})) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

と書ける。(付録 III 参照)

Maxwell の方程式の (10) 式を、(16) 式の様書き直しても、電磁ポテンシャルのみより創成される電磁場に関しては、数学上の恒等式であることに変わりなく、何も新しい知見は得られない。

しかし、一般には、(10) 式は下記の様書くことができる。(付録 III 参照)

$$(1/(2\sqrt{-g}))e^{k\mu\nu\rho}\partial_\mu\hat{F}_{\nu\rho}=v^{*k} \quad (17)$$

ここで,

$$\hat{F}_{\nu\rho} \propto \text{dual}(F^*_{\nu\rho}) \quad (18)$$

$$v^{*k} = (v^{*0}, v^{*1}, v^{*2}, v^{*3}) \quad (19)$$

$F^*_{\nu\rho}$ ,  $v^{*k}$  は, 今のところ未知のテンソルである。従来の理論においては, この二つのテンソルについての検討がされていなかった。

## 2. 2 別種の Maxwell の方程式

$F_{\mu\nu}$ ,  $F^{\mu\nu}$  が (9), (10) 式を満たす電磁界のテンソルであるとすれば, 別種のテンソル  $\hat{F}_{\mu\nu}$ ,  $\hat{F}^{\mu\nu}$  があって

$$D_\nu\hat{F}^{\mu\nu}=0 \quad (\text{数学恒等式}) \quad (20)$$

$$(1/(2\sqrt{-g}))e^{k\mu\nu\rho}\partial_\mu\hat{F}_{\nu\rho}=v^{*k} \quad (\text{物理法則式}) \quad (21)$$

なる方程式が成立している可能性がある。そして

$$\left. \begin{aligned} \hat{F}^{\mu\nu} &\propto \text{dual}(F^*_{\mu\nu}) & (a) \\ v^{*k} &\propto i^{*k} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ただし

$F^*_{\mu\nu}$ ; 磁電ポテンシャルベクトルの作る電磁場のテンソル

$i^{*k}$ ; 4次元磁流ベクトル

であろう。というのが本論文の骨子である。ただし, 磁荷, 磁流は, 今のところ発見されていないので

$$i^{*k} = (0, 0, 0, 0) \quad (23)$$

とするが, そこに4次元(軸性)ベクトルが存在できることを強調するために,  $v^{*k}$ ,  $i^{*k}$  を必ず書いておくことにする。

## 3. 磁電ポテンシャルつくる電磁場

前章の仮説が正しければ, 磁電ポテンシャル  $\phi^*$ ,  $A^*$  があり

$$\left. \begin{aligned} \phi^*/c &= A^{*0} & (a) \\ A^* &= (A^*_u, A^*_v, A^*_w) & (b) \\ &= (h_1 A^{*1}, h_2 A^{*2}, h_3 A^{*3}) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

である。

磁荷, 磁流を想定した, 3次元理論<sup>(4)</sup>は,

$$\left. \begin{aligned} E^* &= -(1/\epsilon_0)\nabla \times A^* & (a) \\ H^* &= -\nabla^*\phi - \partial_t A^* & (b) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここで,  $E^*$ ,  $H^*$  は, それぞれ, 磁電ポテンシャルの作る電場および磁場である。

磁電的 Lorentz 条件は

$$\nabla^2 A^* + (1/c^2)\partial_t\phi^* = 0 \quad (26)$$

である。3次元の磁電的 Maxwell の方程式の一組は

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot H^* &= (1/\mu_0)\rho^* & (\rho^*; \text{磁荷}) & (a) \\ \nabla \times E^* + \mu_0\partial_t H^* &= -i^* & (i^*; \text{磁流}) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

である。ここで

$$\left. \begin{aligned} D^* &= \epsilon_0 E^* & (a) \\ H^* &= (1/\mu_0)B^* & (b) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

とする。

4次元時空では, (26) 式は

$$D_\mu A^{*\mu} = 0 \quad (29)$$

となり, 磁電場の共変テンソルは

$$F^*_{\mu\nu} = \partial_\mu A^*_\nu - \partial_\nu A^*_\mu \quad (30)$$

$$= \begin{pmatrix} 0, & -h^*_1/c, & -h^*_2/c, & -h^*_3/c \\ h^*_1/c, & 0, & -d^*_3, & d^*_2 \\ h^*_2/c, & d^*_3, & 0, & -d^*_1 \\ h^*_3/c, & -d^*_2, & d^*_1, & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

である。磁電場の反変テンソルは

$$F^{*\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F^*_{\alpha\beta} \\ = \begin{pmatrix} 0, & h^{*1}/c, & h^{*2}/c, & h^{*3}/c \\ -h^{*1}/c, & 0, & -d^{*3}, & d^{*2} \\ -h^{*2}/c, & d^{*3}, & 0, & -d^{*1} \\ -h^{*3}/c, & -d^{*2}, & d^{*1}, & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

である。なお

$h_k$  ; 測度係数  
 $h^*_k, h^{*k}$ ; 3次元理論の磁場  $H^*$  の成分に対応する4次元テンソルの成分  
 $d^*_k, d^{*k}$ ; " の電束密度  $D^*$  の成分に "

である。

(27) 式は, 4次元時空においては

$$\left. \begin{aligned} D_\mu F^{*k\mu} &= \epsilon_0 i^{*k} \\ \therefore i^{*k} &= (c\rho^{*0}, i^{*1}, i^{*2}, i^{*3}) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

である。

$$\tilde{F}^{*\mu\nu} \equiv \text{dual}(F^*_{\mu\nu}) \quad (34)$$

とすると, 付録II, IIIより

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}^{*0\nu} &= -d^*_\nu \\ \tilde{F}^{*\mu\nu} (\mu \neq \nu) &= h^*_\rho / c \end{aligned} \right\} \quad (a) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{F}^{\mu\nu} &= c\mu_0 \tilde{F}^{*\mu\nu} = \sqrt{(\mu_0/\epsilon_0)} F^{*\mu\nu} \\ &= \zeta_0 \tilde{F}^{*\mu\nu} (\because \zeta_0 \equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\therefore \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = -\zeta_0 i^{*k} \quad (37)$$

である。Maxwell の方程式のもう一方の組

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot D^* &= 0 \\ \nabla \times H^* - \partial_t D^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a) \quad (38)$$

は,

$$\frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu F^*_{\nu\rho} = 0 \quad (39)$$

であるが, この式は  $F^*_{\nu\rho}$  の定義式 (30) より, Riemann 幾何学上の恒等式である。

この式は付録IIIの定理IVより

$$D_\mu \hat{F}^{k\mu} = 0 \quad (40)$$

となる。また, (33) 式は, Lagrangean を

$$L^* = -(1/(4\epsilon_0)) F^*_{\mu\nu} A^{*\mu} + A^{*\mu} i^{*\mu} \quad (41)$$

とにおいて, 作用積分を零にすることによって得られる。また磁電ポテンシャルに関する波動方程式は,

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu A^{*k} = -\epsilon_0 i^{*k} \quad (42)$$

であることは明らかである。

#### 4. 電氣的量と磁氣的量の新しい対称性

以上、総合すると

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \zeta_0 \text{ dual } (F^{*\mu\nu}) \quad (43)$$

とすると、Maxwell の方程式は

$$F_{T,\mu\nu} = F^{\mu\nu} + \hat{F}^{\mu\nu} \quad (44)$$

とにおいて

$$\left. \begin{aligned} D_\nu F_{T,\mu\nu} &= D_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 i^k (\because D_\nu \hat{F}^{\mu\nu} = 0) & (a) \\ \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{T,\nu\rho} &= -\zeta_0 i^{*k} & \\ (\because \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} &= 0) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

となる。これが、完全な形の電磁界方程式と考えられる。これを、つぎに述べる別の方程式と区別するために、電磁的 Maxwell の方程式と名付ける。

実は、これと等価な、別の形の表現法がある。今までのいきさつから言うと、磁電的 Maxwell の方程式と呼ばれるべき性格の表現法である。すなわち、

$$\hat{F}^*_{\mu\nu} = (1/\zeta_0) \text{ dual } (F^{\mu\nu}) \quad (46)$$

とすると、磁電的 Maxwell の方程式は

$$F^*_{T,\mu\nu} = F^{*\mu\nu} + \hat{F}^*_{\mu\nu} \quad (47)$$

とにおいて

$$\left. \begin{aligned} D_\nu F^*_{T,\mu\nu} &= D_\nu F^{*\mu\nu} = \mu_0 i^{*k} (\because D_\nu \hat{F}^{*\mu\nu} = 0) & (a) \\ \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu F^*_{T,\nu\rho} &= -(1/\zeta_0) i^k & \\ (\because \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu F^*_{\nu\rho} &= 0) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

となる。

これらの、二つの Maxwell の方程式は、どちらを採用してもかまわないが、電荷、電流が優勢な領域では、電磁的 Maxwell の方程式を、磁荷、磁流が優勢な領域では、磁電的 Maxwell の方程式を採用すると便利であると考えられる。

宇宙論的規模で、我々の近傍（我々の銀河系程度の広がり）は、電荷、電流の優勢な領域であると考えられる。そして、何らかの事情で、電荷、電流と、磁荷、磁流が、混在することに制限が加わっているのではないかと推定される。本論文の主張によれば、我々が、いまだに、磁気単極子を発見できない理由はここにある。もし、この考えが正しければ、磁気単極子は、遠方の、銀河系外星雲から来る宇宙線の中に存在するであろう。

#### 5. 終 章

今のところ、

$$i^{*k} = (0, 0, 0, 0) \quad (49)$$

であるが、本論文によれば、相対論的古典電磁場理論は、磁荷、磁流が存在できる形に書き直すことができることがわかった。これは、アンテナ工学における、等価磁流の仮定の妥当性を保証するものである。また、磁気単極子の存在は、相対論的電磁界理論の段階では、否定できないことになる。

#### 〔参 考 文 献〕

- (1) 山内, 内山, 中野「一般相対性および重力の理論」(増補版) pp.19~25 裳華房
- (2) 内山「一般相対性理論」pp.44~52 裳華房

- (3) L. D. Landau and E. M. Lifshitz: "The Classical Theory of Field", The 4th Revised English Edition, pp. 16~18, PERGAMON PRESS (1987)  
 (4) J. A. Stratton "Electromagnetic Theory" p. 464 McGRAW-HILL (1941)  
 (5) 村田茂昭 Levi-Civita の記号と軸性ベクトルについて 電気学会電磁界理論研究会資料 EMT-83-11 (1983. 7.)  
 (6) 佐藤文隆, 小玉英雄 岩波講座 現代の物理学 6「一般相対性理論」p. 34 岩波書店 (1992)

## 付録 I Levi-Civita の記号

Einstein の理論を尊重し, 我々の時空を, 4次元異常 Riemann 空間とする。以下において, 基本テンソルよりえられる行列式を  $g$  とする。

$$g = \text{Det}(\text{Mat}(g_{ij})) = -h_1^2 h_2^2 h_3^2 < 0 \quad (\text{A I} - 1)$$

反変的 Levi-Civita の記号  $e^{ijkl}$  と共変的 Levi-Civita の記号  $e_{ijkl}$  を下記のごとく定義する。

$$\left. \begin{array}{l} e^{ijkl} \\ -e_{ijkl} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 1; (ijkl) \rightarrow (0123) & \text{偶置換} \\ -1; (ijkl) \rightarrow (0123) & \text{奇置換} \\ 0; i,j,k,l \text{ の中に同じものがある場合} & \end{array} \right\} \quad (\text{A I} - 2)$$

Levi-Civita の当初のアイディアからするといささか変則的であるが, 我々の時空が異常 Riemann 空間であるとすればやむを得ない。(これらの二つの記号が, 一つの物理量の, 数学的に異なる二つの表現と見なすと, こう定義すべきである。Landau の著書<sup>(3)</sup> 参照) これらは, それぞれ重みプラス1と, マイナス1の4階のテンソル密度である。

〔注〕本論文では, 座標変換の行列より作る行列式は常に正である座標変換のみを考えている。これは, 三次元空間を例にとり解説すると, 常に右手系(または, 常に左手系)の場合についてのみ解析することに対応する。物理学において, 過度に数学的になることは, 禁物である。右手系から左手系への変換(または, その逆)がやむを得ない場合は, 例外として別に解析し直せばよい。4次元時空の場合には, 時間のみの逆転も, 本論文においては, 例外扱いである。(時間の逆転と右手系から左手系への変換が同時に起こる場合は, 本論文の議論がそのまま適用できる。)

この煩わしい問題は, 本格的には, 座標系の符号と言う概念を導入すると, 解決できる<sup>(5)</sup>が, これは, あまりにも数学的である。それよりも, テンソル密度の概念が, より重要である。(テンソルは, 重み零のテンソル密度である。)相当高度の参考書で, この概念の導入を省略する傾向<sup>(6)</sup>があるが, 困ったことである。

二つの Levi-Civita の記号の関係は

$$\left. \begin{array}{l} e_{ijkl} = (1/(-g)) g_{i\mu} g_{j\nu} g_{k\rho} g_{l\lambda} e^{\mu\nu\rho\lambda} \\ e^{ijkl} = -g g^{i\mu} g^{j\nu} g^{k\rho} g^{l\lambda} e_{\mu\nu\rho\lambda} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \quad (\text{A I} - 3)$$

である。この式の,  $g$  の前に表われる負符号は, Einstein の相対論が, 異常 Riemann 空間に建設されているからである。

$$(\sqrt{-g})^2 = -g \quad (\text{A I} - 4)$$

$-g$  は重みプラス2のスカラ密度であるから, (A I - 3) 式は, Levi-Civita の記号の定義式から予想されるとおりの形をしている。

空間座標系を右手系に限ると,  $\sqrt{-g}$  は重みプラス1のスカラ密度であるから, つぎのごとく, 任意の二つの指標に関して反対称である4階の反変および共変のテンソルが得られる。

$$\left. \begin{aligned} E'_{ijkl} &= (1/\sqrt{-g}) e^{ijkl} & (a) \\ E''_{ijkl} &= \sqrt{-g} e_{ijkl} & (b) \end{aligned} \right\} (A I - 5)$$

ここで

$$\begin{aligned} E''_{ijkl} &= \sqrt{-g} (1/(-g)) g_{i\mu} g_{j\nu} g_{k\rho} g_{l\lambda} e^{\mu\nu\rho\lambda} \\ &= g_{i\mu} g_{j\nu} g_{k\rho} g_{l\lambda} (1/\sqrt{-g}) e^{\mu\nu\rho\lambda} \\ &= g_{i\mu} g_{j\nu} g_{k\rho} g_{l\lambda} E'^{\mu\nu\rho\lambda} \end{aligned} \quad (A I - 6)$$

であるから、 $E'_{ijkl}$  と  $E''_{ijkl}$  は、一つのテンソル  $E$  の共変成分と反変成分である。

$$\left. \begin{aligned} \therefore E''_{ijkl} &= E'_{ijkl} \equiv E_{ijkl} & (a) \\ \therefore E''_{ijkl} &= E'_{ijkl} = E^{ijkl} & (b) \end{aligned} \right\} (A I - 7)$$

これらは、一般には、Levi-Civita の擬テンソルと呼ばれている<sup>(6)</sup> が、前述の様に、本論文においては、空間部分は右手系のみを考えているので、「擬」という文字を省いて記述することにする。またつぎの定理は、重要である。

#### 【定理 I】

$$e_{ij\mu\nu} e^{\mu\nu kl} = -2\delta_{ij}{}^{kl} \quad (A I - 8)$$

ただし、 $\delta_{ij}{}^{kl}$  は、拡張された Kronecker のデルタであり

$$\delta_{ij}{}^{kl} = \begin{cases} 1; (ij) = (kl) & i \neq j \\ -1; (ij) = (lk) & i \neq j \\ 0; \text{他の場合} \end{cases} \quad (A I - 9)$$

〔証明〕 (A I - 1) 式より

$$\left. \begin{aligned} (ij\mu\nu) &\rightarrow (\mu\nu ij) \text{ 偶置換} & (1) \\ [e_{ijkl}] &= -[e^{ijkl}] & \\ &= -[e_{ijlk}] = [e^{ijlk}] & (2) \\ \text{abs}[e_{ijkl}] &= \text{abs}[e^{ijkl}] = 1 \text{ or } 0 & (3) \end{aligned} \right\} (A I - 10)$$

ただし、abs は絶対値を表わし、[ ] は数値のみを示す。

〔証明終〕

(A I - 8) 式中の負符号も、前に述べた理由（異常 Riemann 空間）で重要である。

〔付録 I 完〕

#### 付録 II 2 階の反対称テンソルの dual テンソル

2 階の反対称テンソル  $A^{\mu\nu}$ ,  $A_{\mu\nu}$  がある。

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta} \quad (A II - 1)$$

$A^{\mu\nu}$ ,  $A_{\mu\nu}$  は、一つの物理量の数学的に異なる二つの表現である。この物理量を、本文中では、テンソル  $A$  と表記しよう。このテンソルより、新しくつぎのようなふたつのテンソルを定義する。

$$\left. \begin{aligned} A'^{ij} &\equiv (1/(2\sqrt{-g})) e^{ij\mu\nu} A_{\mu\nu} & (a) \\ A'_{ij} &= g_{i\mu} g_{j\nu} A'^{\mu\nu} & (b) \end{aligned} \right\} (A II - 2)$$

$$\left. \begin{aligned} A''_{ij} &\equiv (1/2)\sqrt{-g} e_{ij\mu\nu} A^{\mu\nu} & (a) \\ A''^{ij} &= g^{i\mu} g^{j\nu} A''_{\mu\nu} & (b) \end{aligned} \right\} (A II - 3)$$

以下において、テンソル  $A'$ ,  $A''$  が、同一のテンソルであることを証明する。

付録 I より

$$\begin{aligned} A'^{ij} &= (1/2) E^{ij\mu\nu} A_{\mu\nu} \\ A''^{ij} &= g^{i\mu} g^{j\nu} (1/2) E_{\mu\nu\alpha\beta} A^{\alpha\beta} = g^{i\mu} g^{j\nu} (1/2) E_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda} A_{\rho\lambda} \\ &= (1/2) g^{i\mu} g^{j\nu} g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda} E_{\mu\nu\alpha\beta} A_{\rho\lambda} \\ &= (1/2) E^{ij\rho\lambda} A_{\rho\lambda} = A'^{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1/2)\sqrt{-g} e^{ij\mu\nu} A_{\mu\nu} \\
&\equiv \tilde{A}^{ij}
\end{aligned} \tag{A II-4}$$

この関係を行列で表現すると

$$\text{Mat}(A^{ij}) = (1/\sqrt{-g}) \begin{pmatrix} 0, & A_{23}, & A_{31}, & A_{12} \\ -A_{23}, & 0, & A_{03}, & -A_{02} \\ -A_{31}, & -A_{03}, & 0, & A_{01} \\ -A_{12}, & A_{02}, & -A_{01}, & 0 \end{pmatrix} \tag{A II-5}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
A'_{ij} &= A''_{ij} = (1/2)\sqrt{-g} e_{ij\mu\nu} A^{\mu\nu} \\
&\equiv \tilde{A}_{ij}
\end{aligned} \tag{A II-6}$$

$$\therefore \text{Mat}(\tilde{A}_{ij}) = -\sqrt{-g} \begin{pmatrix} 0, & A^{23}, & A^{31}, & A^{12} \\ -A^{23}, & 0, & A^{03}, & -A^{02} \\ -A^{31}, & -A^{03}, & 0, & A^{01} \\ -A^{12}, & A^{02}, & -A^{01}, & 0 \end{pmatrix} \tag{A II-7}$$

となる。

この関係は、直交曲線座標系および、その系から、一般座標変換で到達できるすべての座標系で成立する。(重力場は、考慮していない。本論文は、一般相対論的手法を用いてはいるが、さしあたり、重力場のない空間における電磁界理論の確立をめざしている。)

以上の解析により  $A'_{ij}$ ,  $A''_{ij}$  は同一のテンソルであることが証明された。

この様な関係式が成立している時、 $A^{ij}$  と、 $\tilde{A}_{ij}$  または、 $A_{ij}$  と  $\tilde{A}^{ij}$  とは、互いに dual であると定義する。

$$\begin{aligned}
\text{dual}(A_{ij}) &\equiv \tilde{A}^{ij} & (a) \\
\text{dual}(A^{ij}) &\equiv \tilde{A}_{ij} & (b)
\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{dual}(A_{ij}) &\equiv \tilde{A}^{ij} \\ \text{dual}(A^{ij}) &\equiv \tilde{A}_{ij} \end{aligned}} \right\} \tag{A II-8}$$

つぎの、定理は重要である。

### 【定理 II】

ある反対称テンソルの、dual テンソルの dual テンソルは、そのテンソル自身に負号を付けたテンソルである。

$$\begin{aligned}
\text{dual}(\text{dual}(A_{ij})) &= -A_{ij} & (a) \\
\text{dual}(\text{dual}(A^{ij})) &= -A^{ij} & (b)
\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{dual}(\text{dual}(A_{ij})) &= -A_{ij} \\ \text{dual}(\text{dual}(A^{ij})) &= -A^{ij} \end{aligned}} \right\} \tag{A II-9}$$

すなわち dual 演算子はずぎの様な特性を持つ。

$$\text{dual}(\text{dual}(\quad)) = (\text{dual})^2(= -1)(\quad) \tag{A II-10}$$

〔証明〕

(A II-2 a) 式より

$$\text{dual}(A_{ij}) = (1/(2\sqrt{-g})) e^{ij\mu\nu} A_{\mu\nu} \tag{A II-11}$$

(A II-3 a) 式より

$$\begin{aligned}
\text{dual}(\text{dual}(A_{ij})) &= (1/2)\sqrt{-g} e_{ij\mu\nu} (1/(2\sqrt{-g})) e^{\mu\nu\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \\
&= (1/4) e_{ij\mu\nu} e^{\mu\nu\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \\
&= (1/4) (-2\delta_{ij}^{\mu\nu}) A_{\mu\nu} \\
&= -A_{ij}
\end{aligned} \tag{A II-12}$$

同様にして

$$\text{dual}(\text{dual}(A^{ij})) = -A^{ij} \tag{A II-13}$$

〔証明終〕

この定理は、ある 2 階の反対称テンソルの、dual テンソルが、一種類しか無い、すなわち



(A II-4), (A II-6) 式が, 同時に成立するための必要条件を示している。

[付録 II 完]

### 付録 III 2 階の反対称テンソルとその dual テンソルに関する定理

反対称テンソル  $A_{ij}$ ,  $A^{ij}$  と, その dual テンソル  $\tilde{A}^{ij}$ ,  $\tilde{A}_{ij}$  に関して二つの, 重要な定理がある。先ず四つの命題 (方程式) を, 羅列する。

$$\langle A \rangle; D_\mu \tilde{A}^{k\mu} = \eta^k \quad (\text{A III-1})$$

$$\langle B \rangle; \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu A_{\nu\rho} = \eta^k \quad (\text{A III-2})$$

$$\langle C \rangle; \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu \tilde{A}_{\nu\rho} = \xi^k \quad (\text{A III-3})$$

$$\langle D \rangle; D_\mu A^{k\mu} = -\xi^k \quad (\text{A III-4})$$

【定理 III】  $\langle A \rangle$  であれば  $\langle B \rangle$  である。

[証明]

(A II-2 a) 式より  $k=0$  として

$$D_\mu \tilde{A}^{0\mu} = (1/\sqrt{-g}) \partial_\mu (\sqrt{-g} \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{0\mu\nu\rho} \partial_\mu A_{\nu\rho}) \quad (\text{A III-5})$$

$$= \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) \{ \partial_0 e^{00\nu\rho} A_{\nu\rho} + \partial_1 e^{01\nu\rho} A_{\nu\rho} + \partial_2 e^{02\nu\rho} A_{\nu\rho} + \partial_3 e^{03\nu\rho} A_{\nu\rho} \} \quad (\text{A III-6})$$

{ } 内の各項は 2 倍の寄与をするから

$$\begin{aligned} \therefore D_\mu \tilde{A}^{0\mu} &= (1/\sqrt{-g}) \{ \partial_1 e^{0123} A_{23} + \partial_2 e^{0231} A_{31} \partial_3 e^{0312} A_{12} \} \\ &= (1/\sqrt{-g}) \{ e^{0123} \partial_1 A_{23} + e^{0231} \partial_2 A_{31} + e^{0312} \partial_3 A_{12} \} \end{aligned} \quad (\text{A III-7})$$

$$\therefore \partial_\mu e^{ijkl} = 0 \quad (\text{A III-8})$$

etc.

つぎに  $k=1$  として上記と同様に

$$D_\mu \tilde{A}^{1\mu} = (1/\sqrt{-g}) \partial_\mu (\sqrt{-g} \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{1\mu\nu\rho} \partial_\mu A_{\nu\rho}) \quad (\text{A III-9})$$

$$= (1/\sqrt{-g}) \{ e^{1023} \partial_1 A_{23} + e^{1230} \partial_2 A_{30} + e^{1302} \partial_3 A_{02} \} \quad (\text{A III-10})$$

以上を総合すると

$$D_\mu \tilde{A}^{k\mu} = (1/\sqrt{-g}) (e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu A_{\nu\rho}) = \eta^k \quad (\text{A III-11})$$

[定理 III 証明終]

なおこの逆も正しい。すなわち

【定理 IV】  $\langle B \rangle$  であれば  $\langle A \rangle$  である。

[証明] 省略

また, この例では Levi-Civita の記号の符号は  $(\mu\nu\rho)$  の数字の置換数で決まるのでは無く,  $(k\mu\nu\rho)$  の数字の置換数で決まるのであることに留意すべきである。

上記の様な証明法には, 曖昧な点は無いが, 通常の 4 次元の Maxwell の方程式のごとく

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A III-12})$$

と表記すると符号が分からなくなる。つまり, 今までは,

$$\eta^k = (0, 0, 0, 0) \quad (\text{A III-13})$$

の例しか考えていなかったため, 符号が問題にならなかったのである。

【定理 V】  $\langle C \rangle$  であれば  $\langle D \rangle$  である。

[証明]

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu \tilde{A}_{\nu\rho} (= \xi^k) \\
&= \frac{1}{2} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} \partial_\mu \{ (1/2) \sqrt{-g} e_{\nu\rho\alpha\beta} A^{\alpha\beta} \} \\
&= \frac{1}{4} (1/\sqrt{-g}) e^{k\mu\nu\rho} e_{\nu\rho\alpha\beta} \partial_\mu \{ \sqrt{-g} A^{\alpha\beta} \}
\end{aligned} \tag{A III-14}$$

付録 I の定理 I より

$$\begin{aligned}
\xi^k &= \frac{1}{4} (1/\sqrt{-g}) (-2\delta^{k\mu}_{\alpha\beta}) \partial_\mu \{ \sqrt{-g} A^{\alpha\beta} \} \\
&= - (1/\sqrt{-g}) \partial_\mu \{ \sqrt{-g} A^{k\mu} \} \\
&= -D_\mu A^{k\mu}
\end{aligned} \tag{A III-15}$$

$$\therefore D_\mu A^{k\mu} = -\xi^k \tag{A III-16}$$

この逆も成立する。すなわち

【定理 VI】 〈D〉 であれば 〈C〉 である。

[証明] 省略

[付録 III 完]

[完]